Chapitre 1

Rappels d'analyse 1

1.1 Bornes

1.1.1 Maximum, majorant et borne supérieure

Les définitions et théorèmes s'appliquent aussi aux minorants, bornes inférieures, etc.

Définition 1.1 : Majorant

M est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$

Définition 1.2 : Maximum

m est un maxium de A si $\forall x \in A, x \leq m$ et $m \in A$. C'est un majorant appartenant à A. On le note $\max(A)$.

Pour montrer que m est le maximum d'un ensemble, il faut montrer qu'il appartient à cet ensemble et que $\forall x \in A, x \leq m$

Définition 1.3 : Borne supérieure

M est la borne supérieure de A si M est un majorant de A et s'il en existe pas de plus petits. On le note $\sup(A)$. C'est le plus petit des majorants

Théorème 1.1 : Théorème fondamental de l'analyse

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Proposition 1.1 : Caractérisation de la borne supérieure

$$M = \sup(A) \iff M \text{ majore A } \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$$

1.2 Suites

1.2.1 Limites

Définition 2.1

La suite a pour limite l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Définition 2.2 : Série géométrique

$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Proposition 2.1 : Limite de la série géométrique

$+\infty$ si $a > 1$ et $\frac{1}{1-a}$ si $|a| < 1$. Dans les autres cas, elle est divergente.

1.2.2 Suites extraites

Définition 2.3

C'est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Théorème 2.1 : Suite convergente et suite extraite

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Preuve 2.1

Avec $\varphi \in \mathbb{R}$ Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Definition de la limite : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il exisye N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$.

Or, φ est strciteent croissante donc $\varphi(n) \geq n$.

Donc $n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq N$ et $|U_\varphi| - l| \leq \varepsilon$.

Proposition 2.2

La suite (U_n) converge vers l si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers l.

Preuve 2.2

On traduit les hypothèses : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |U_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |U_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Si $n \geq N$, alors

- si n est pair, $n = 2k$ et $n \geq 2N_1$ d'où $k \geq N_1$ donc $|U_n - l| = |U_{2k} - l| \leq \varepsilon$
- si n est impair, $n = 2k' + 1$ et $n \geq 2N_2 + 1$ d'où $k' \geq N_2 + 1$ donc $|U_n - l| = |U_{2k'+1} - l| \leq \varepsilon$

Définition 2.4

l est une valeur d'adhérence si une suite extraite de u_n prend l comme limite.

Théorème 2.2 : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

1.3 Comparaison

1.3.1 Négligeabilité

Définition 3.1

On note $o(u_n)$ une suite pouvant s'écrire de la forme $(\varepsilon_n u_n)$ avec $(\varepsilon_n \to 0) = (v_n)$. On dit que (v_n) est négligeable devant u_n.

Proposition 3.1

$$v_n = o(u_n) \iff \lim \frac{v_n}{u_n} = 0$$

1.3.2 Équivalence

Définition 3.2

$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$

Proposition 3.2 : lien avec négligeance

$u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n \sim v_n$

Proposition 3.3 : Équivalent de puissance

$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

1.4 Développements limités

Théorème 4.1 : Formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + o((x-a)^n)$$

1.4.1 Développements limités usuels

Ce sont les DL des fonctions au voisinage de 0 !

Développements limités à connaître

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

1.4.2 Remarques

- Quand une fonction est paire, son DL ne comporte que des puissances de x paires.
- Le DL d'une fonction impaire ne comporte que des puissances de x impaires.
- Quand elle n'est ni paire ni impaire, elle comporte à priori toutes les puissances de x (sauf exception).
- Le DL de ch(x) est la partie paire de e^x.
- Le DL de sh(x) est la partie impaire de e^x.