3

Chapitre

Compléments sur les suites et fonctions

3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

3.1.1 Suites

Proposition 1.1 : Caractérisation de la valeur d'adhérence

l est une valeur d'adhérence de la suite) $\iff \forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m, |u_n - l| \leq \varepsilon.$

Proposition 1.2

Soit u_n une suite bornée avec une unique valeur d'adhérence. Alors cette suite converge vers cette valeur d'adhérence

3.2 Fonctions continues sur un segment

3.2.1 Continuité

Définition 2.1 : Continuité

une fonction est continue si $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in I, (|x - y|) < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(y)|) < \varepsilon$

Proposition 2.1 : Critère séquentiel de la continuité

f est continue en un point $x \in I \iff \forall (x_n)_n \subset I$ qui converge vers x, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Proposition 2.2

Toute fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ est bornée et atteint ses bornes sur I.

Théorème 2.1

L'image d'un segment (intervalle borné et fermé) par une fonction continue est un segment.

3.2.2 Continuité uniforme

Définition 2.2

Une fonction est uniformément continue sur I $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, (|x - y|) < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(y)|) < \varepsilon$

Définition 2.3

Une fonction est lipschitzienne $\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Théorème 2.2

Toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

Théorème 2.3 : Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un segment I est uniformément continue sur I.

3.3 Suites de Cauchy

Définition 3.1

Une suite est de cachy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p \geq N, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$

Proposition 3.1

- Toute suite convergente est de Cauchy
- Toute suite de Cauchy est bornée
- Une suite de Cauchy ademttant une valeur d'adhérence est convergente.

Théorème 3.1

Toute suite de Cauchy converge