

# Chapitre

# Intégrales

## 4.1 Intégrale de Riemann

### $\pi$ Définition 1.1 : Subdivision

C'est toute famille de réels  $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  telle que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Son pas est la quantité  $\max(x_1 - x_{i-1})$ . On dit que  $v$  est plus fine, si tout élément de  $v$  est un élément de  $u$ .

C'est une subdivision régulière si  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ .

### $\pi$ Proposition 1.1

Si  $u$  et  $v$  sont des subdivisions, alors il existe une subdivision plus fine que  $u$  et  $v$ .

### $\pi$ Définition 1.2

Une fonction est dite en escalier s'il existe une subdivision  $u$  telle que la fonction est constante sur chaque intervalle ouvert  $]x_{i-1}, x_i[$ . On dit alors que  $u$  est une subdivision adaptée à la fonction.

### $\pi$ Définition 1.3 : Fonction continue par morceaux

On dit qu'une fonction est continue par morceaux si on peut trouver une subdivision adaptée à  $f$  telle que la restriction de  $f$  à chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  soit continue et admette des limites finies à droite de  $x_{i-1}$  et à gauche de  $x_i$ .

**!** Remarque

Si une fonction est cpm, alors  $\forall x_0 \in [a, b]$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  existent et sont finies.

Exemple :  $g(x) = 0$  si  $x = 0$ ,  $\sin(\frac{1}{x})$  si  $x > 0$

**π** Proposition 1.2

La combinaison linéaire (et produit/division) de fonctions en escaliers est une fonction en escalier.

**π** Proposition 1.3

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée

**π** Définition 1.4

$f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si  $f$  possède une limite en  $a$ .

Le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  est bien définie en  $a$ . On rajoute le point duquel la fonction se rapproche.

**π** Théorème 1.1 : Approximation d'une fonction continue par morceaux

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment. Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \theta$  en escalier tq

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \theta(x)| < \varepsilon$$

**π** Proposition 1.4

Soit  $f$  cpm sur  $[a, b]$ .  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \phi, \psi$ , en escalier telles que  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  et  $\psi - \phi \leq \varepsilon$ .

**π** Proposition 1.5

On a

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

qui ne dépend pas de la subdivision choisie, avec  $c_i$  la valeur de la fonction entre  $x_i$  et  $x_{i-1}$ .

**π** Proposition 1.6

Les propriétés de linéarité, de croissance, de positivité et d'additivité sont conservées.

**π** Proposition 1.7

On note  $E^+, E^-$  l'ensemble des fonctions en escalier supérieures et inférieures à  $f$ . La borne supérieure de l'ensemble des  $E^-$  et la borne inférieure de la borne des  $E^+$  sont égales.

**π** Définition 1.5

Si  $f$  est cpm, on appelle intégrale de  $f$   $\sup(\{\int \varphi, \varphi \in E^-(f)\}) = \inf(\{\int \psi, \psi \in E^+(f)\})$ .

**π** Proposition 1.8

On dit que la fonction est intégrable au sens de Riemann si  $\sup(I^-) = \inf(I^+(f))$

**π** Proposition 1.9 : VA de l'intégrale

Si  $f$  est cpm sur un intervalle, alors  $|f|$  l'est aussi et  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

**π** Proposition 1.10 : Inégalité de la moyenne

Si  $f$  et  $g$  sont cpm, alors leur produit l'est aussi et  $|\int_I fg| \leq \sup_I(|f|) \times \int_I |g|$

**π** Proposition 1.11 : Corollaire des bornes

Si  $f$  est cpm, on a  $|\int_{[a,b]} f| \leq (b - a) \sup_{[a,b]}(|f|)$

**π** Proposition 1.12 : Valeur moyenne

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]}(f)$$

**π** Théorème 1.2 : Intégrale non nulle

Si  $f$  est continue et positive sur  $[a,b]$ , alors  $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$  sur  $[a, b]$

## 4.2 Somme de Riemann

**π** Définition 2.1

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $u$  une subdivision. On appelle Somme de Riemann associée à  $u$  la quantité  $\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n})$

**π** Théorème 2.1 : Limite de la somme de Riemann

$$\lim S_R = \int_a^b f(x)dx$$

## 4.3 Intégrales et primitives

importance de l'intervalle  $I$  :  $\arctan(x) + \arctan(1/x)$  a une dérivée nulle mais n'est pas constante.



### Théorème 3.1 : Théorème fondamental

La fonction  $F_a$  définie par  $\forall i \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$

Démonstrations



### Théorème 3.2 : Intégration par parties

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ .

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$



### Théorème 3.3 : Changement de variable

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $\varphi : J \rightarrow I$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $a, b \in J$ , on a  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx =$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ .