Chapitre

5

Intégrales impropres

Exemples de fonctions qui ne sont pas cpm :

- $x \to \frac{1}{x}$ si $x \neq 0, 0$ car pas de limite finie en 0

5.1 Introduction

5.1.1 CPM sur un intervalle

Définition 1.1

Une fonction est cpm sur I si pour tout segement appartenant à I, la restrcition de cette fonction à ce segment est cpm.

Proposition 1.1

Si f est cpm, alors $|f|$ l'est aussi.

5.1.2 Convergence

Définition 1.2

Si $I = [a, +\infty]$, l'intégrale converge si la limite quand $x \to \infty$. On a alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Si $I =]a, b]$, l'intégrale converge si la limite quand $x \to a$. On a alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

5.1.3 Propriétés

Proposition 1.2

- Chasles : $\int_a^{+\infty} = \in_a^{a'} + \int_{a'}^{+\infty}$
- Linéarité : À ne pas utiliser si l'une des deux intégrales et divergente
- Positivité et relation d'ordre
- Intégration par parties : Seules les bornes changent

Proposition 1.3

On suppose que f admet une limite. Si sa limite n'est pas nulle, l'intégrale vers ∞ diverge. La contraposée est aussi valable.

5.2 Fonctions de signe constants

Proposition 2.1

Si $\int_a^{+\infty} f$ est convergente $\iff$ $x \to \int_a^x$ est majorée

Proposition 2.2 : Intégrale de Riemann en $+\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$. Dans le cas contraire, elle diverge.

Proposition 2.3 : Intégrale de Riemann en 0

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$. Dans le cas contraire, elle diverge.

Proposition 2.4 : Inétgrale de bertrand en $+\infty$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ converge si $\beta > 1$ ou . Dans le cas contraire, elle diverge.

Proposition 2.5 : Inétgrale de bertrand en 0

$\int_2^{1/2} \frac{1}{t|(\ln(t))|^\beta}$ converge si $\beta > 1$ ou . Dans le cas contraire, elle diverge.

Théorème de comparaison

Le théorème de comparaison s'applique aussi pour les intégrales généralisées dont les fonctions sont positives.

Proposition 2.6 : Théorème des équivalents

Si 2 fonctions positives sont équivalents en un point incertain, leur intégrale sont de même nature près de ce point.