2

Chapitre

Démonstrations

Théorème 0.1 : Intégrale de Riemann

$$\text{Si} \quad \alpha > 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si} \quad \alpha \leq 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge.}$$

Preuve 0.1 : Intégrale de Riemann

On a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln t\right]_1^x & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'intégrale converge si $a - 1 > 1$, soit $\alpha > 1$ et tend vers 0.

Théorème 0.2 : Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $]a, b]$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\exists A \quad \forall t > A \qquad f(t) \leq g(t)\ .$$

1. Si $\int_a^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Preuve 0.2

La convergence ne dépend pas de la borne de gauche, on peut donc étudier $\int_A^x f$, tout comme g. Par la positivité de l'intégrale, on a $\forall x \geq A$:

$$\int_A^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_A^x g(t)\mathrm{d}t)$$

Si la deuxième intégrale converge, la première converge car c'est alors une fonction majorée et croissante et admet donc une limite finie. Inversement, si la première diverge, la deuxième diverge comme fonction minorée par une fonction de limite infinie.

Théorème 0.3 : Théorème des équivalents

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $]a, b]$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \ .$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Preuve 0.3

1. Les fonctions f et g sont équivalentes en $+\infty$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists A, (1-\varepsilon)g(t) < f(t) < (1+\varepsilon)g$.
2. Fixons $\varepsilon < 1$. Par le théorème de comparaison, si $\int_A^{+\infty} f(t)$ converge, $\int_A^{+\infty}(1-\varepsilon)g(t)$ converge, et par linéarité $\int_A^{+\infty} g(t)$ converge puis par Chasles $\int_a^{+\infty}(g)$.
3. De même si $\int_A^{+\infty} f(t)$ diverge.

Théorème 0.4 : Approximation d'une fonction cpm par morceaux

Soit f cpm. $\forall \varepsilon > 0, \exists \theta$ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \theta(x)| < \varepsilon$$

Preuve 0.4

Pour les fonctions continues :

1. La fonction est uniformément continue sur le segment considéré.
2. Par définition, $\exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
3. On choisit une subdivision régulière de pas strictement inférieur à δ avec $\theta(a) = f(a, \forall x \in]x_{i-1}, x_i], \theta(x) = f(x_i))$

Pour les fonctions cpm

1. Soit v une subdivision adpatée. $\forall i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$ f est prolongeable par continuité en une fonction continue.
2. On peut créer une fontion en escalier θ_i telle que $|f_i(x) - \theta_i(x)| < \varepsilon$
3. On construit θ avec $\forall x \in]y_{i-1}, y_i], \theta(x) = \theta_i(x)$ et $\theta(y_i) = f(y_i)$

Théorème 0.5 : Intégrale d'un fonction cpm

- $I^- = \{\int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in E^-(f)\}$ admet un sup
- $I^+ = \{\int_{[a,b]} \psi, \psi \in E^+(f)\}$ admet un inf
- Ces 2 bornes sont égales

Preuve 0.5

1. Les ensembles sont non-vides
2. $\forall \varphi \in E^-(f), \int \varphi \leq \int \psi$ qui est un majorant de $I^-(f)$. Donc $I^-(f)$ admet une borne supérieure et $\sup I^- \leq \int \psi$
3. Cette inégalité étant vraie pour tout ψ, $\sup I^-$ minore I^+ et $\sup I^- \leq \inf I^+$
4. On fixe $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\varphi \in E^-, \psi \in E^+$ tels que $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$.
5. Par linéarité de l'intégrale et monotonie :

$$\int \psi - \int \varphi = \int \psi - \varphi \leq (b - a)\varepsilon$$

6. Or par définition, $\int \varphi \leq \sup I^-, \int \leq \inf I^+$
7. Donc $0 \leq \inf I^+ - \sup I^- \leq \varepsilon(b-a)$

Théorème 0.6 : Règle du quotient de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs telle que $(\frac{u_{k+1}}{u_k})$ converge vers l

1. Si $l < 1$, la série converge.
2. Si $l > 1$, la série diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut conclure.

Preuve 0.6

Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum q^k$ converge si $|q| < 1$, diverge sinon.

- Dans le premier cas du théorème, soit un réel q tel que $l < q < 1$. On a $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leq q$ à partir d'un certain rang N, et donc $u_{k+1} \leq u_k q$. Par récurrence, on obtient que

  $$u_k \leq u_{k-(k-N)} q^{k-N} = u_N q^{-N} q^k = cq^k$$

  , avec c constant.

  Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, et, par le théorème de comparaison : la série $\sum u_k$ converge.
- Si $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| > 1$, la suite $(|u_k|)$ est croissante : elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge.

Théorème 0.7 : Critère de Leibniz

Supposons que $(u_k)_{k\geq 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$,
2. la suite (u_k) est une suite décroissante,
3. et $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ converge.

De plus, Soit S la somme de cette série et soit (S_n) la suite des sommes partielles.

1. La somme S vérifie les encadrements :

$$S_1 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_4 \leq S_0.$$

2. En plus, si $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n, alors on a

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

Preuve 0.7

Nous allons nous ramener à deux suites adjacentes.

- La suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$.
- La suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$.
- Enfin $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$ (lorsque $n \to +\infty$).

En conséquence (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent vers la même limite S. Donc (S_n) converge vers S.

De plus, comme les suites S_{2n+1} et S_{2n} sont adjacentes, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n.

Enfin on a aussi

$$0 \geq R_{2n} = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$$

pour n pair et, pour n impair

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

Ainsi, quelle que soit la parité de n, on a $|R_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$.