

Chapitre

Suites

1.1 Rappels

π Définition 1.1 : Suite réelle/complexe

Une suite réelle réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

π Définition 1.2 : Suites réelles majorées/minorées

Une suite réelle est

- majorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \leq C$
- minorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \geq C$

π Définition 1.3 : Suite réelle/complexe bornée

Si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_p| \leq C$.

π Définition 1.4 : Suite convergente/divergente

Une suite est dite convergente si $\exists l \in \mathbb{R} \setminus \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, |u_p - l| \leq \varepsilon$. On dit que l est la limite de la suite. On le note $u_p \rightarrow l$.

On n'écrit pas $\lim u_p = l$ car en faisant ça on suppose que la limite existe avant même de commencer à l'étudier. Il ne faut pas l'écrire en début de calcul.



Définition 1.5 : Suite divergente

Elle est divergente si elle n'est pas convergente.



Proposition 1.1

Soit (u) une suite convergente. On suppose qu'il existe l_1, l_2 telle que $u_p \rightarrow l_1$ et $u_p \rightarrow l_2$. Alors $l_1 = l_2$.



Preuve 1.1

On suppose qu'il existe l_1, l_2 telle que $u_p \rightarrow l_1$ et $u_p \rightarrow l_2$. Par définition de la convergence d'une suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_1, |u_p - l_1| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_2, |u_p - l_2| \leq \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors $\forall p \geq N, |u_p - l_1| \leq \varepsilon$ et $\forall p \geq N, |u_p - l_2| \leq \varepsilon$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \iff l_1 = l_2$$



Proposition 1.2

Soit u une suite convergente. Alors elle est bornée. La réciproque est fautive. En effet, $u_n = (-1)^n$ à démontrer avec la def de la limite



Preuve 1.2

Soit u CV et l sa limite. Prenons $\varepsilon = 36$. $\exists N, \forall p \geq N, |u_p - l| \leq 36$. Mais $|u_p - l| \leq 36 \Rightarrow |u_p| \leq 36 + |l|$ par inégalité triangulaire.

Posons $M = \max(|u_0|, |u_1| \dots |u_N|)$ et $C = \max(M, 36 + |l|)$

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\bullet \quad p \leq N, |u_p| \leq M \leq C$$

$$\cdot p \geq N, |u_p| \leq 36 + |l| \leq C$$

π Définition 1.6 : Limite infinie de suites réelles

On dit que la suite tend vers

- $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$
- $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$

π Définition 1.7 : Propriété vraie à partir d'un certain rang

On dit qu'une suite vérifie une propriété à partir d'un certain rang, si $\exists n, \forall p \geq n, u_p$ vérifie la propriété.

π Définition 1.8 : Suites réelles monotones

Soit u une suite réelle. On dit que u est croissante (à partir d'un certain rang) si $(\exists N, \forall p(\geq N), u_{p+1} \geq u_p)$.

π Proposition 1.3

Toute suite réelle croissante à partir d'un certain rang tend vers une limite finie ou infinie.

Si elle est en plus majorée, elle tend vers une limite finie.

Exemple : $w_p = \frac{p^2}{2^p} \geq -70$ Elle est minorée.

$w_{p+1} - w_p = \frac{p^2 + 2p + 1 - 2p^2}{2^{p+1}} = -\frac{(p-1)^2 - 2}{2^{p+1}} \leq 0$ dès que $p \geq 3$. Donc elle est décroissante à partir du rang 3. Donc elle est convergente et admet une limite.

1.2 Notations de Landau

π Définition 2.1 : Suites négligeables

Soit u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v (en $+\infty$), noté $u_p = o_p(v_p)$. Il existe une suite ε telle que $\varepsilon_p \rightarrow 0$ et $u_p = v_p \varepsilon_p$ à partir d'un certain rang.

π Proposition 2.1

u et v deux suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, v_p \neq 0$. Alors $u_p = o(v_p) \iff \frac{u_p}{v_p} \rightarrow 0$.

π Preuve 2.1

Supposons $u_p = o(v_p)$. Alors $\exists(\varepsilon_p), \varepsilon_p \rightarrow 0$ et $u_p = \varepsilon_p v_p$ à partir d'un certain rang M .

$$\forall p \geq \max(M, N), \frac{u_p}{v_p} = \varepsilon_p \rightarrow 0.$$

Supposons $\frac{u_p}{v_p} \rightarrow 0$. Définissons $\varepsilon_p = \frac{u_p}{v_p}$ si $p \geq N$ et 1 dans le cas contraire. Alors $\varepsilon_p \rightarrow 0$ et $\forall p \geq N, u_p = \varepsilon_p v_p$, donc $u_p = o(v_p)$.

Exercice : Montrer que $u_p = o(v_p) \iff |u_p| = o(|v_p|)$. en utilisant la définition

$$u_p = v_p \varepsilon_p \Rightarrow |u_p| = |\varepsilon_p v_p| = |\varepsilon_p| |v_p| = o(|v_p|) \text{ car } \varepsilon_p \rightarrow 0.$$

$|u_p| = o(|v_p|) \iff \frac{|u_p|}{|v_p|} \rightarrow 0$ Si u_p et v_p sont de même signe, $\frac{u_p}{v_p} \geq 0$ et $\frac{u_p}{v_p} \rightarrow 0+$. Dans le cas contraire, $\frac{u_p}{v_p} \rightarrow 0-$. Dans tous les cas, $\frac{u_p}{v_p} \rightarrow 0$, donc $u_p = o(v_p)$.

Exemple : $p^3 = o(p^5)$.

Exemple : $p^k = o(p^m) \iff m > k$.

On a jamais $u_p = o(u_p)$ sauf si la suite est nulle à partir d'un certain rang.

π Proposition 2.2

Si $u = o(v), v = o(w)$, alors $u = o(w)$.

π Preuve 2.2

Il existe 2 suites ε et η qui tendent vers 0 telles que $u_p = \varepsilon_p v_p \forall p \geq$

N_1 et $v_p = \eta_p w_p \forall p \geq N_2$

$\forall p \geq \max(N_1, N_2), u_p = \varepsilon_p v_p = \varepsilon_p \eta_p w_p$. On pose $\delta_p = \varepsilon_p \eta_p \rightarrow 0$.

π Définition 2.2 : Suite dominée

Soient u et v deux suites, on dit que u est dominée par v , noté $u = O(v)$ si $\exists \eta$ une suite *bornée* telle que $u_p = \eta_p v_p$ à partir d'un certain rang.

π Proposition 2.3

Si $u = o(v)$, alors $u = O(v)$.

π Preuve 2.3 : À faire

$u_p = o(v_p) = \varepsilon_p v_p$ avec $\varepsilon_p \rightarrow 0$. Elle est convergente, donc bornée.
On peut donc poser $\eta_p = \varepsilon_p$ et $u_p = \eta_p v_p = O(v_p)$

π Proposition 2.4

Si $v_p \neq 0, \forall p \geq N_1$, on a : $u = O(v) \iff \exists C \in \mathbb{R}^+ \forall p \geq N, \left| \frac{u_p}{v_p} \right| \leq C$.

π Preuve 2.4

$(u_p) = O(v_p) = \eta_p v_p$, donc $\frac{u_p}{v_p} = \eta_p$ qui est bornée. Donc par définition, $\exists C \in \mathbb{R}^+ \forall p \geq N, \left| \frac{u_p}{v_p} \right| \leq C$

Autre sens ?