Chapitre

1

Développements limités

1.1 Défintion et premières propriétés

Définition 1.1 : Développement limité en 0

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en 0 à l'ordre m si il existe un pôlynome $P \in \mathbb{R}_m[X]$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) = P(x) + x^m \varepsilon(x)$.

On appelle le pôlynome la partie régulière du développement et le $o(\dots)$ est le reste. Les coefficients du polynome sont appelés les coefficient du développement limité.

Définition 1.2 : En $x \neq 0$

Soit $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}, t \to g(t + x_0)$ Alors g admet un DL à l'ordre m en x_0 $\iff$ f admet un DL à l'ordfe m en 0.

On peut donc faire un changement de variable $t + x_0 = x$.

Lemme 1.1

Si f admet un DL à l'ordre m en 0, alors il admet un DL à l'odre k en 0 $\forall k \in \{0, \dots, m\}$ qui s'obtient en troquant le DL initial à partir du coeffcient k

Théorème 1.1 : Unicité du DL

Les coeffcicients du DL d'une fonction sont unique.

Lemme 1.2

f admet un DL limité en 0 à l'ordre 0 $\iff$ f est continue en 0. Dans ce cas, $a_0 = f(0)$

Lemme 1.3

f admet un DL à l'ordre 1 en 0 $\iff$ f est dérivable en 0. Dans ce cas, $a_1 = f'(0)$.

Exemples :

- $\sin(x) = 0 + 1x + o(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 + o(x)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$

Proposition 1.1 : DL et "primitivation"

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une primitive F. Si f admet un DL en 0 à l'ordre p : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$, alors F admet un DL à l'ordre $p+1$: $F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + o(x^{p+1})$

Proposition 1.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, tel que $\exists p \in \mathbb{N}$, $f'(x) = o(x^p)$. Alors $f(x) = f(0) + o(x^{p+1}) = f(0) + (x^{p+1})\varepsilon_2(x)$

1.2 Notation de Landeau

Définition 2.1

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g en x_0, noté $f = o_{x \to x_0}(g)$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to x$ et $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) = g(x)\varepsilon$

On dit que f est dominée par g en x_0, noté $f = O(g)_{x \to x_0}$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\to \mathbb{R}$ telle que $|\varepsilon| \leq C$ et $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) = g(x)\varepsilon$

On dit que f est dominée par g en x_0, noté $f \sim_{x \to x_0} g$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to 0$ et $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon)$

Sommes

$o(x^m) + o(x^m) = o(x^m)$ mais on a aussi $o(x^m) - o(x^m) = o(x^m) \neq 0$.

1.3 Fonctions p fois dérivables

Dans cette partie, on note I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1

pour $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p^{ene} de $f : I \to \mathbb{R}$, notée $f^{(p)}$ est définie récursivement : $f^{(0)} = f$ et si $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I, alors $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$.

On dit que f est p fois dérivable si $f^{(p)}$ est définie. Comme la dérivabilité implique la continuité, et $f^{(p)}$ déifinie, les dérivées précédentes sont continues sur tout l'intervalle.

Définition 3.2 : Fonction p fois dérivables en un point

On dit que f est p fois dérivabilité en $x_0 \in I$ si $\exists I_1$ intervalle ouvert tel que $x_0 \in {}_1 \in I$ tel que f est p-1 fois dérivable sur I_1 et $f^{(p-1)}$ est dérivable en x_0.

Définition 3.3 : Classe

On dit que f est de classe C^p sur I si f est p fois dérivable sur I et la dérivée pème est continue.

On dit que f est de classe C^∞ si $f \in C^p \forall p \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Soit f et g p fois dérivables sur I. Alors $f+g$ p fois dérivables sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.

Cela fonctionne aussi pour f et g p fois dérivables en un point et de classe C^p.

Proposition 3.2

λf est p fois dérivables et $\lambda f^{(p)} = (\lambda f)^{(p)}$.

Proposition 3.3

fg est p fois dérivable sur I et $(fg)^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} C_p^m f^{(m)} g^{(p-m)}$

Proposition 3.4

Soient I, J 2 intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est n fois dérivable sur I et g est n fois déruvable sur J, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I.

Proposition 3.5

Si $g : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors la fonction $f : x \in I \to \frac{1}{g(x)}$ est n fois dérivable aussi.

Proposition 3.6 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $n \neq 0$ fois dérivable telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f est une bijection de I dans $f(I) = J \in \mathbb{R}$. On a alors l'application réciproque f^{-1} est n fois dérivable. On a aussi $f^{-1} : J \to I$

1.4 Formules de Taylor

Théorème 4.1 : Théorème de Taylor-Young

Si f est $(n \geq 1)$ fois dérivable en 0, alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$

Théorème 4.2 : Théorème de taylor-Lagranges

Si f est $(n \geq 1)$ fois dérivable sur I, alors

$\forall x \in I, \exists c_x \in [\min(0,x), \max(0,x)]$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c_x)$

Remarques

Quand n=1, on obtient le TAF

Si $x \neq 0, c_x \in$ l'intervalle ouvert.

Théorème 4.3 : Formule de Taylor-Laplace (avec reste intégrale)

Si f $I \to \mathbb{R}$ tel que f tes de classe $C^p(I)$, alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(0) +$

$$\int_0^x f^{(p)}(s)\frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!}\mathrm{d}s$$

1.4.1 DL de fonctions usuelles

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\cosh x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sinh x &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)
\end{aligned}
$$