Chapitre 1

Développements limités

1.1 Défintion et premières propriétés

Définition 1.1 : Développement limité en 0

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en 0 à l'ordre m si il existe un pôlynome $P \in \mathbb{R}_m[X]$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) = P(x) + x^m \varepsilon(x)$.

On appelle le pôlynome la partie régulière du développement et le $o(\dots)$ est le reste. Les coefficients du polynome sont appelés les coefficient du développement limité.

Définition 1.2 : En $x \neq 0$

Soit $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}, t \to g(t + x_0)$ Alors g admet un DL à l'ordre m en x_0 $\iff$ f admet un DL à l'ordfe m en 0.

On peut donc faire un changement de variable $t + x_0 = x$.

Lemme 1.1

Si f admet un DL à l'ordre m en 0, alors il admet un DL à l'odre k en 0 $\forall k \in \{0, \dots, m\}$ qui s'obtient en troquant le DL initial à partir du coeffcient k

Preuve 1.1

Si $k = m$, c'est bon. Si $k < m$. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_mx^m + o(x^m) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + x^k(a_{k+1}x + \cdots + a_mx^{m-k} + o(x^{m-k}))$

Théorème 1.1 : Unicité du DL

Les coeffcicients du DL d'une fonction sont unique.

Preuve 1.2 : Par récurrence sur m

Initialisation : Soit f telle que $f(x) = a_0 + \varepsilon(x) = b_0 + \eta(x)$ En $x = 0$, on obtient $a_0 = b_0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe m tel que H_n vraie.

Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + o(x^m) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m + o(x^m)$. Par le même précédent $f(x) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx^m = b_0 + b_1x_1 + \ldots b_mx^m o(x)$

Donc par H_n c'est égal. Donc en particulier $a_{m+1}x^{m+1} = b_{m+1}x^{m+1}$.

Pour $x \neq 0$, on a $a_{m+1} + o(x) = b_{m+1} + o(x)$. En prenant la limite quand $x \to$ mais $x \neq 0$

Donc H_{n+1}.

Lemme 1.2

f admet un DL limité en 0 à l'ordre 0 $\iff$ f est continue en 0. Dans ce cas, $a_0 = f(0)$

Preuve 1.3

On a $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \to 0$ Donc en 0, $a_0 = a_0 + \varepsilon = f(0)$ et $\forall x \in I, |f - x) - f(0)| = |f(x) - a_0| = |\varepsilon| \to 0$. Donc f est continue en 0.

Soit $x \in I, f(x) = f(0) + f(x) - f(0) = f(0) + \varepsilon(x)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x) = +f(x) - f(0) \to 0$. Par unicité du DL,

$a_0 = f(0)$.

Lemme 1.3

f admet un DL à l'ordre 1 en 0 $\iff$ f est dérivable en 0. Dans ce cas, $a_1 = f'(0)$.

Preuve 1.4

On a $\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1 x + o(x) = f(0) + a_1 x + o(x)$. Donc $\forall x \neq 0, \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{a_1 x + o(x)}{x} = a_1 + o(1) \to a_1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} = a_1$.

$f(x) = f(0) + xf'(0) + (f(x) - f(0) - xf'(0))$. Posons $\varepsilon = \frac{f(x)-f(0)-xf'(0)'}{x} \forall x \neq 0$ et 0 en $x = 0$. On a bien $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$. Il faut montrer que $\varepsilon \to 0$. On sait par hypothèse que f est dérivable en 0. On a donc $|\varepsilon| = |\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0)| \to 0$

Exemples :

- $\sin(x) = 0 + 1x + o(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 + o(x)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$

Proposition 1.1 : DL et "primitivation"

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une primitive F. Si f admet un DL en 0 à l'ordre p : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$, alors F admet un DL à l'ordre $p+1$: $F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + o(x^{p+1})$

Proposition 1.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, tel que $\exists p \in \mathbb{N}, f'(x) = o(x^p)$. Alors $f(x) = f(0) + o(x^{p+1}) = f(0) + (x^{p+1})\varepsilon_2(x)$

Preuve 1.5

Par le TAF, on a $\forall x \neq 0, \exists c_x \in]-|x|,|x|[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c_x)(x-0) = f'(c_x)$. Donc $f(x) = f(0)+xf'(x) = f(0)+xc_x^p\varepsilon(c_x)$. Posons $\varepsilon_2(x) = \frac{xc_c^p\varepsilon(c_x)}{x^{p+1}}$ si $x \neq 0$ ou 0 si $x = 0$. On a par construction, $f(x) = f(0) + x^p\varepsilon_2(x)$.

Montrons maintenant que $\varepsilon_2(x) \to 0$: on a $|\varepsilon_2(x)-0| = \frac{|c_x|^p|\varepsilon(x)}{|x|^p} \leq \frac{|x|^p|\varepsilon(x)}{|x|^p} = |\varepsilon(c_x)| \to 0$ car $c_x \to 0$ quand $x \to 0$ (car $c_x \in]-|x|,|x|[$.).

Preuve 1.6 : De la proposition 1

Posons $G : x \in I \to F(x) - a_0 - a_1x^2/2 - \cdots - a_p\frac{x^{p+1}}{p+1}$. On a G dérivable sur I et $\forall x \in I,, G'(x) = f(x)-a_0-a_1x-a_px^p = x^p\varepsilon(x)$ par hypothèse. Par la proposition précédente, $G(x) = G(0) + x^{p+1}\varepsilon_2(x)$. Fini par la défintion de G.

1.2 Notation de Landeau

Définition 2.1

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g en x_0, noté $f = o_{x\to x_0}(g)$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0-\eta, x_0+\eta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to x$ et $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[, f(x) = g(x)\varepsilon$

On dit que f est dominée par g en x_0, noté $f = O(g)_{x\to x_0}$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0-\eta, x_0+\eta[\to \mathbb{R}$ telle que $|\varepsilon| \leq C$ et $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[, f(x) = g(x)\varepsilon$

On dit que f est dominée par g en x_0, noté $f \sim_{x\to x_0} g$ si il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0-\eta, x_0+\eta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to 0$ et $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[, f(x) = g(x)(1+\varepsilon)$

Remarque

Si $\varepsilon \to 0$, $x^p\varepsilon(x) = o(x^p)$.

De plus, f admet un DL à l'ordre p en 0 $\iff$ $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + o_{x\to 0}(x^p)$.

Enfin, $f(x) = o(1) \iff f \to 0$.

$f = x + o(x) \iff f \sim x$.

$\forall m, p \in \mathbb{N}, m \leq p, o(x^m) \Rightarrow O(x^m), o(x^p) \Rightarrow o(x^m)$.

$o(x^p)o(x^m) = o(x^{m+p})$.

Sommes

$o(x^m)+o(x^m) = o(x^m)$ mais on a aussi $o(x^m)-o(x^m) = o(x^m) \neq 0$.

1.3 Fonctions p fois dérivables

Dans cette partie, on note I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1

pour $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p^{ene} de $f : I \to \mathbb{R}$, notée $f^{(p)}$ est définie récursivement : $f^{(0)} = f$ et si $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I, alors $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$.

On dit que f est p fois dérivable si $f^{(p)}$ est définie. Comme la dérivabilité implique la continuité, et $f^{(p)}$ déifinie, les dérivées précédentes sont continues sur tout l'intervalle.

Définition 3.2 : Fonction p fois dérivables en un point

On dit que f est p fois dérivabilité en $x_0 \in I$ si $\exists I_1$ intervalle ouvert tel que $x_0 \in {}_1 \in I$ tel que f est p-1 fois dérivable sur I_1 et $f^{(p-1)}$ est dérivable en x_0.

Définition 3.3 : Classe

On dit que f est de classe C^p sur I si f est p fois dérivable sur I et la dérivée pème est continue.

On dit que f est de classe C^∞ si $f \in C^p \forall p \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Soit f et g p fois dérivables sur I. Alors $f+g$ p fois dérivables sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.

Preuve 3.1 : Par récurrence sur p

Initialisation : pour $p=0$, on a $(f+g)^{(0)} = (f+g) = f+g$

Hérédité : Supposons qu'elles sont p fois dérivables. On a $(f+g)^{(p)}$ et dérivons les. On a $f^{(p)'} + g^{(p)'} = f^{(p+1)} + g^{(p+1)}$.

Cela fonctionne aussi pour f et g p fois dérivables en un point et de classe C^p.

Proposition 3.2

λf est p fois dérivables et $\lambda f^{(p)} = (\lambda f)^{(p)}$.

Proposition 3.3

fg est p fois dérivable sur I et $(fg)^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} C_p^m f^{(m)} g^{(p-m)}$

Preuve 3.2 : Par récurrence sur p

Ini : OK pour p = 0

Hérédité : Supposons H_n vraie pour un entier p. On prend f et g p+1 fois dérivables sur I. Alors f et g sont une fois dérivable. Donc fg est une fois dérivable et $(fg)' = fg' + f'g$. Donc par hypothèse (fg) est p fois dérivable $\Rightarrow$ fg est p+1 fois dérivable.

De plus, $fg^{(p+1)} = ((gf)')^{(p)} = (f'g + fg')^{(p)} = (f'g)^{(p)} + (fg')^{(p)}$, soit par hypothèse

$$= \sum_{m=0}^{p} C_p^m (f')^{(m)} g^{(p-m)} + \sum_{m=0}^{p} C_p^m f^{(m)} (g')^{(p-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{p} C_p^m (f)^{(m+1)} g^{(p-m)} + \sum_{m=0}^{p} C_p^m f^{(m)} (g)^{(p-m+1)}$$

$$= C_p^p f^{(p+1)} g^{(0)} + \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m f^{(m+1)} g^{(p-m)}$$

$$+ C_p^0 f^{(0)} g^{(p+1)} + \sum_{m=1}^{p} C_p^m f^{(m)} g^{(p-m+1)}$$

$$= C_p^p f^{(p+1)} g^{(0)} + \sum_{m=1}^{p} C_p^{m-1} f^{(m)} g^{(p-(m-1))}$$

$$+ C_p^0 f^{(0)} g^{(p+1)} + \sum_{m=1}^{p} C_p^m f^{(m)} g^{(p-m+1)}$$

$$= (C_p^p = 1) f^{(p+1)} g^{(0)} + \sum_{m=1}^{p} (C_p^{m-1} + (C_p^m) = C_{p+1}^m) f^{(m)} g^{(p-m+1)}$$

$$+ (C_p^0 = 1) f^{(0)} g^{(p+1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{p+1} (C_{p+1}^m) f^{(m)} g^{((p+1)-m)}$$

On applique l'hypothèse aux deux termes de la somme

On fait passer f' en f en rajoutant unn degré de dévrivation. On fait la même chose pour g

On change l'indice supérieur de la première somme. Elle ne va maintenant plus que jusqu'à p-1. Pour compenser on ajoute le terme en p pour maintenir l'égalité. De la même façon, on ajoute 1 à l'indice de départ de la deuxième somme. Pour maintenir l'égalité, on ajoute le premier terme de la somme

On effectue un changement d'indice pour transformer la somme.

On peut maintenant fusionner les 2 sommes car elles s'expriment avec les mm̂es indices.

On remarque qu'en additionnant les termes qui restent, on obtient une somme allant de 0 à p+1, ce qui est recherché dans notre hérédité

Proposition 3.4

Soient I, J 2 intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est n fois dérivable sur I et g est n fois déruvable sur J, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I.

Preuve 3.3 : Par récurrence

Ini : pour n=0, OK

Soient f n+1 fois dérivable sur I, et g n+1 fois dérivable sur J. On a f et g dérivables sur I et J, donc $g \circ f$ est dérivable sur I et

$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

f est n+1 fois dérivable, donc f' est n fois dérivable.

g est n+1 fois dérivbale donc g' est n fois dérivable.

Par l'hypothèse de récurrence $g \circ f$ est n fois dérivable, donc le produit $(g' \circ f)f'$ est n fois dérivable, donc $g \circ f$ est n+1 fois dérivable.

Pour la formule, on utilise la formule de Fadi Bruno.

Proposition 3.5

Si $g : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors la fonction $f : x \in I \to \frac{1}{g(x)}$ est n fois dérivable aussi.

Proposition 3.6 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $n \neq 0$ fois dérivable telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f est une bijection de I dans $f(I) = J \in \mathbb{R}$. On a alors l'application réciproque f^{-1} est n fois dérivable. On a aussi $f^{-1} : J \to I$

Preuve 3.4

Par récurrence ou direct : $f^{-1'} = \frac{1}{f'(f^{-1})}$ On a $f^{-1'} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. En effet, $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})(x) = 1 \iff f^{-1'} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ On peut aussi s'en servir pour retrouver la dérivée de arcsin

1.4 Formules de Taylor

Théorème 4.1 : Théorème de Taylor-Young

Si f est $(n \geq 1)$ fois dérivable en 0, alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$

Preuve 4.1

Par récurrence :

Ini : Pour n=0,1 : OK.

Soit f n+1 fois dérivable en 0.

Alors f' est n fois dérivable en 0, donc par hypothèse $f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \cdots + x^n \frac{f^{(n+1)(0)}}{n!} + o(x^n)$. Par la propriété de 'primitivation' des DL, on obtient $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + o(x^{n+1})$

Théorème 4.2 : Théorème de taylor-Lagranges

Si f est $(n \geq 1)$ fois dérivable sur I, alors

$\forall x \in I, \exists c_x \in [\min(0,x), \max(0,x)]$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c_x)$

Remarques

Quand n=1, on obtient le TAF

Si $x \neq 0, c_x \in$ l'intervalle ouvert.

Proposition 4.1

Soit I un intervalle ouvert non vode de R, $f : I \to \mathbb{R}$, p+1 fois dérivable. On suppose qu'il existe $(a,b) \in I \times I$ tels que $f(a) = f(b)$ et $0 = f'(a) = f''(a) = f^{(p)}(a)$. Alors $\exists c \in]\min(a,b), \max(a,b)[$ tel que $f^{(p+1)}(c) = 0$.

Preuve 4.2

Preuve dans les notes de cours

Preuve 4.3 : de Taylor-Lagranges

Si $x = 0$, on prend $c_x = 0$.

À partir de maintenant, on fixe $x \in I, x \neq 0$ Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $G_k : t \in I \to f(t) - f(0) - tf'(0) - \cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) - \frac{t^n}{n!} K$. On choisi K tel que $G(x) = 0$.

On a G_x est p fois dérivable sur I. On a aussi $G_k(0) = g_k(x) = 0$. De plus, par constcrution $G_k'(0) = G_k''(0) = G^{(n-1)}(0) = 0$

Par Rolle généralisé, $\exists c_x \in]\min(0,x), \max(0,c)[$ tel que $G_k^{(n)} = 0 = f^{(n)} - K \Rightarrow K = f^{(n)}(c_x)$.

Théorème 4.3 : Formule de Taylor-Laplace (avec reste intégrale)

Si f $I \to \mathbb{R}$ tel que f tes de classe $C^p(I)$, alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(0) +$

$$\int_0^x f^{(p)}(s) \frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!} \mathrm{d}s$$

Preuve 4.4 : Par récurrence

Ini pour p = 1. $\int_0^x f^{(p)}(s) \frac{(x-s)^0}{(0)!} \mathrm{d}s = f(x) - f(0)$

Hérédite : On suppose qu'il existe un p tel que l'hypothèse est vraie. L'application $s \in I :\to f^{(p+1)}(s) \frac{(x-s)^p}{(p)!}$ est continue donc intégrable sur [0,x]. On peut donc écrire

$$\int_0^x f^{(p+1)}(s) \frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!} \mathrm{d}s$$

On fait une intégration par parties : On pose $u'(s) = f^{(p+1)}(s) \to u = f^{(p)}(s)$ et $v = \frac{(x-s)^p}{p!} \to v'(s) = -\frac{1}{(p-1)!}(x-s)^{p-1}$. En intégrant, on obtient

$u(x)v(x) - u(0)v(0) - \int_0^x (s)v'(s)\mathrm{d}s = -f^{(p)(0)} \frac{x^p}{p!} - \int_0^x f^{(p)}(s) \frac{-1}{(p-1)!}(x-s)^{p+1}\mathrm{d}s$. Par l'hypothèse de récurrence $= -f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!} + f(x) - f(0) + xf'(0) - \cdots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(0)$. Donc H_p.

1.4.1 DL de fonctions usuelles

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)
\end{aligned}
$$