3

Chapitre

R- Espaces vectoriels

Définition 0.1 : R-Espace vectoriels

Soit E un ensemble muni de 2 lois (opérations) :

- Une loi de composition interne, appelée addition, notée $+$, $E \times E \to E, (u, v) \to u + v$.
- Une loi de composition externe, appelée multiplication par un réel, noté $\cdot$, $\mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, u) \to \lambda \cdot u$

E est un R ev si

1. $\forall (u, v) \in E \times E, u + v = v + u$ (commutativité)
2. $\forall (u, v, w) \in E \times E \times E, (u+v)+w = u+(v+w)$ (Associativité)
3. Il existe un élément de E appelé élément neutre, noté 0_E tel que $\forall u \in E, u + 0_E = u$.
4. $u \in E$ admet un opposé (appelé parfois symétrique), $u' \in E$ tel que $u + u' = 0_E$
5. $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
6. $\forall (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\gamma \cdot u) = (\lambda \cdot \gamma) \cdot u$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E \times E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $\forall (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall u \in E, (\lambda + \gamma) \cdot u = \lambda \cdot u + \gamma \cdot u$

Remarque

- Un espace vectoriel est nécessairement non vide
- $\mathbb{R}$ est appelé corps des scalaires.
- Les éléments de E sont appelés vecteurs de E

Exemples :

- $p \geq 1, \mathbb{R}^p = \{(x_1, \ldots, x_p), x \in \mathbb{R}\}$ muni de $x_1 \ldots x_p + (y_1 \ldots, y_p) = (x_1 + y_2, \ldots x_p + y_p)$ et $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_p)$ est un rev.
- $\mathbb{C}^p = \{(z_1, \ldots, z_p), z_p \in \mathbb{C}\}$
- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\{f : I \to \mathbb{R}\}$

Proposition 0.1 : Unicité de l'élément neutre et du symétrique

E admet un unique élément neutre appelé vecteur nul et $\forall u \in E$, u admet un unique opposé.

Proposition 0.2

Soit E un rev, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $0 \times u = O_E, \lambda \cdot O_E = O_E, -1 \cdot u =$ l'opposé de u., $\lambda \cdot u = O_E \iff \lambda = 0OUu = O_E$.

On note -u l'opposé de u. On note v-u = v+(-u).

3.0.1 Sous-espace vectoriel

E est un R-ev.

Définition 0.2

$F \subset E$ est un sous espace vectoriel de E si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u, v) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

Proposition 0.3

F est un sev $\iff$

1. $0_E \in F$

2. $\forall (u,b) \in F \times F, u+v \in F$
3. $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u \in F$

Proposition 0.4

Soit $F \subset E$ un sev, F est Rev.

En pratique

Poir montrer que ce n'est pas un sev, on prend un objet de l'espace et on montre que cela ne vérifie pas les propriétés. Il faut exhiber l'objet pour lequel cela ne fonctionne pas. Pour montrer que c'est un espace vectoriel, on montretra que c'est un sous-espace vectoriel d'un autre espace.

Remarque

L'ensemble ne contenant que le vecteur nul d'un ev est aussi un ev mais l'ensemble vide n'est pas un sev. E est un sev de E.

Proposition 0.5

Soient F et G 2 sev de E. Alors $F \cap G$ est aussi un sev de E

Soit e un ensemble de sev de E. Alors $\forall F \in e, F$ est un sev de E. Alors $\bigcap F$ est un sev de E.

Proposition 0.6 : Corollaire

- Soit $A \subset E$. Posons $e_a = \{F sev de E, A \subset F\}$. Alors $e_a \neq \varnothing$ et $F_A = \bigcap F$ est le plus petit espace vectoriel de E contenant A
- A est un sev de E $\iff F_a = A$

Remarque

F sev de E et G sev de E n'implique pas $F \cup G$ sev de E

Proposition 0.7

Soit 2 sev de E. Alors la somme des 2 est aussi un sev de E.

Définition 0.3

Soient F et G 2 sev de E. On dit que F et G sont en somme directe, noté $F \oplus G$ si $F \cap G = \{O_E\}$

Proposition 0.8

Soient F et G 2 sev de E. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes

- F, G sont en somme directe
- $u_F \in F, u_G \in G$ tel que $U_F + U_g = O_E \Rightarrow U_F + U_G = O_E$
- $\forall u \in F + G, \exists!(u_F, u_G) \in F \times G, u = u_F + u_G$

Définition 0.4 : Espace supplémentaire dans E

Soient F et G 2 sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \cap G = \{O_E\}$ et $F + G = E$

Proposition 0.9

F et G sont supplémentaires ssi $\forall u \in E, \exists!(u_f, u_g) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_g$