Chapitre

5

Applications linéaires

5.1 Dimension quelconque

5.1.1 Définition

On prend E, F 2 R-ev

Définition 1.1

$f : E \to F$ est une application linéaire si

- $f(u +_E v) = f(u) +_F f(v)$
- $f\lambda \cdot_E u = \lambda \cdot_F f(u)$

Exemple : $f : p \in R[X] \to (P(0), P(1), P(2)) \in \mathbb{R}^3$ est une application linéaire. En effet, $f(p+q) = (p+q)(0) + (p+q)(1) + (p+q)(2) = (p(0)+p(1)+p(2)) + (q(0)+q(1)+q(2)) = f(p) + f(q)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda p) = (\lambda(P(0), P(1), P(2)))$

Exemple : $g : p \in \mathbb{R}[X] \to (p(0), p(1), p(0)p(1))$

Prenons $P(X) = 1, \lambda = 2 : \lambda g(P) = (2.2.2), g(\lambda P) = (2.2.4)$.

Remarque

On peut au $\iff$ vérifier les 2 propriétés en même temps. On montre alors que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$

Proposition 1.1

Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$

Notation

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $L(E) = L(E, E)$.

Définition 1.2 : Formes linéaires

On dit que f est une forme linéaire si $f \in L(E, \mathbb{R})$.

Si une application linéaire est bijective, on dit que f est isomorphisme d'espace vectoriel.

Si $f \in L(E)$, c'est un endomorphisme.

Si la fonction vérifie les 2, c'est un automorphisme.

Définition 1.3

Soit $f \in L(E, F)$.

On appelle image de f, noté $Im(f)$ ou $R(f)$ l'ensemble $\{f(x), x \in E\} \subset F$.

On appelle noyau f, noté $Ker(f)$ l'ensemble des antécédants du vecteur nul $\{x \in E, f(x) = 0_F\} \subset E$.

Proposition 1.2

$f \in L(E, F)$. Alors $Ker(f)$ est sev de E et $Im(f)$ est un sev de F.

Proposition 1.3

Soit $f \in L(E, F)$. Alors f est surjective $\iff$ $Im(f) = F$. Elle est injective $\iff Ker(f) = \{0_E\}$.

Proposition 1.4

la composée de 2 applications linéaires est une application linéaire

Proposition 1.5

Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors $f^{-1} \in L(F, E)$

Proposition 1.6

Soit E et F des ev. $L(E, F)$ est un ev dont le vecteur nul est l'application dont l'image est le vecteur nul de F.

5.1.2 Exemples

- $Id_E : x \in E \to x \in E$
- les homotéthies : $f_\mu : x \in E \to \mu X \in E$ (automorphisme si $\mu \neq 0$)
- Les projecteur / projections

Projecteurs

Définition 1.4 : Projecteurs

On dit que $p \in L(E)$ est un projecteur $\iff p^2 (= p \circ p) = p$

Exemple : $p(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (a, b, 0)$

Exemple : $Q = \sum_{m=0}^{N} a_m X^m \to \sum_{m=0}^{\min(K,N)} a_m X^m$

Proposition 1.7

Soit p un projecteur de E. Alors

1. $\forall v \in Im(p), p(v) = v$

2. $E = Im(p) \oplus Ker(p)$

Définition 1.5 : Projection

E un ev, F et G supplémentaires dans E : $\forall u \in E, \exists! u_F, u_G tq u = u_F + u_G$. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : u_F + u_G \to u_F$. Alors

1. $p \in L(E)$
2. $p^2 = p$
3. Im(p) = F, Ker(p) = G

Proposition 1.8 : Corollaire

Soit $p \in L(E)$

p est un projecteur $\iff$ p est une projecion sur Im(p) parallèlement à Ker(p).

Proposition 1.9

$p \in L(E)$ est un projecteur $\iff$ $Id_E - p$ est un projecteur.

Proposition 1.10 : Corollaire

Si p est une projection, $Im(p) = Ker(Id_E - p), Ker(p) = Im(Id_E - p)$

Symétrie

Définition 1.6

Soit $s \in L(E)$. C'est une symétrie $s^2 = Id_E$.

Proposition 1.11 : Lien entre symétrie et projecteur

1. si s est une symétrie, $p = 0.5(s + Id_E)$ est un projecteur
2. si p est un projecteur, alors $s = 2p - Id_E$ est une symétrie

Proposition 1.12 : Corollaire

Soit s une symétrie. ALors $E = Ker(s + Id_E) \oplus Ker(s - Id_E)$.

Proposition 1.13

Soit E un ev, F et G 2 sev supplémentaires de E. On définit

$s : u = u_F + u_G \in E \to u_F - u_G \in E.$

On appelle s symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Alors

1. $s \in L(E)$
2. $s^2 = Id_E \Leftarrow sestunesymtrie$
3. $Ker(s - Id_E) = F, Ker(s + Id_E) = G$

Proposition 1.14 : Corollaire

Soit $s \in L(E)tqs^2 = Id_E$. Alors s est une symétrie par rapport à $Ker(s - Id_E)$ parallèlement à $Ker(s + Id_E)$

Exemple : $(a, b, c) \to (a, b, -c)$

Exemple : $\sum a_k X^k \to \sum (-1)^k a_k X_k$

5.2 Dimension finie

E est un R-EV de dimension finie et F de dimension quelconque

On note N la dimension de E

Proposition 2.1

Soit $F \in L(E, F)$. Alors $Im(f)$ est de dimension finie $\leq N$. On appelle cette dimension rang de f, noté $rg(f)$.

Définition 2.1

Soit B une base de E. Soit $p \in \{1, \ldots, \mathbb{N}\}$. On note $C_{pi}u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_N e_N \in E \rightarrow \lambda_p \in \mathbb{R}$. Alors C_p est une forme liénaire, et pour tout $u \in E, u = c_1(u)e_1 + \cdots + c_N(u)e_N$. C_p est appellée application p-ème coordonnée dans la base B.

Théorème 2.1 :

Soient B une base de dimension N quelconque de E et F une famille de N vecteur de G.

Alors Il existe une unique application linéaire telle que $\forall i \in \{1, \ldots, \mathbb{N}\}, f(e_i) = v_i$

Proposition 2.2 : Corollaire

Soit B une base de E et f une application linéaire. Alors f est complètement déterminée par la connaissance de $(f(e_1), \ldots, f(e_N))$. En effet, $f : u \in E \rightarrow \sum_{p=1}^{N} c_p(u) f(e_p)$.

Proposition 2.3

Soit f une application linéaire. Si f est un isomorphisme (bijective), alors F a la dimension de E.

Théorème 2.2 : Théorème du rang

Soit $f \in L(E, F)$. Alors $\dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(E)$

Proposition 2.4

Si f est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.

Si f est surjective, alors $\dim(F) \geq \dim(F)$

Proposition 2.5 : Corollaire

E et F de dimension finie et égale. Soit $f \in L(E,F)$. Alors f est bijective $\iff$ f surjective, $\iff$ f injective.

Proposition 2.6 : Cororllaire

Soit $f \in L(E)$, alors f est injective $\iff$ f est surjective ou surjective

Exercice : Soit E un EV de dimension finie. Mq toute symétrie de E est bijective et mq le seul projecteur bijectif de E est $p = Id_E$

Proposition 2.7

Soit f une fonction linéaire de E dans F f est bijective $\iff$ L'image d'une base de E par f est une base de F

Proposition 2.8

Supposons $\dim(F) < +\infty$. Alors $L(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(L(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$