5

Chapitre

Espaces vectoriels

Calculer ker et Im

Soient $f \in L(E,F), B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Pour déterminer le noyau, on peut :
  - revenir à la définition, i.e. chercher le sev $\{x \in E, f(x) = 0_E\}$
  - En connaissant $dim(Ker(f)) = p \neq 0$, on cherche une famille libre de p vecteurs tels que $f(x_1) = \dots = f(x_p) = 0_F$ et conclure avec $Ker(f) = Vect(x_1, \dots, x_p)$
- Pour déterminer Im(f) :
  - revenir à la définition et chercher le sev $Im(f) = vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$
  - Avec $rg(f) = p \neq 0$, chercher une famille libre de p vecteurs $\{f(e'_1), \dots, f(e'_p)\}$ avec $\{e'_1, \dots, e'_p\} \subset B$ puis conclure avec $Im(f) = Vect(f(e'_1), \dots, f(e'_p))$

Montrer l'injectivité ou la surjectivité

Pour l'injectivité, on montre au choix que :

- $\forall x \in E, f(x) = 0_F \Rightarrow x = 0_E$
- $dim(Ker(f)) = 0$
- Si S est libre, alors $f(S)$ est libre

Pour la surjectivité :

- Montrer que $vect(f(e_1, \dots, e_n)) = F$