Chapitre 6

Matrices

6.1 Définition

Définition 1.1 : Matrices

Soit A une matrice. Le coefficient situé en ligne i et colonne j de A est noté A_{ij}.

On note $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels

Exemple : $I_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $a_{32} = 0, a_{14} = 6, a_{22} = 1$

6.2 Structure d'espaces vectoriels

Proposition 2.1 : Strcuture d'EV des matrices

Munie de ces opérations, $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ est un R-espace vectoriel de dimension finie $p \times q$

Définition 2.1 : Transposée

Soit A une matrice. On appelle transposée de A, notée A^T, A^t, t_A, T_A la matrice de q lignes et p colonnes. On a $A^T_{ij} = A_{ji}$. L'application de transposition est une application linéaire.

Définition 2.2 : Matrices symétriques /anti-symétriques

Si A est une matrice carrée :

- A est symétrique si $A^T = A$. On note S l'ensemble des matrices symétriques
- A est anti-symétrique si $A^T = -A$ On note AS cet ensemble

S et AS sont des SEV de $\mathcal{M}_C(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_C = S \oplus AS$

Décomposition

On a

$$A = 0.5(A + A^T) + 0.5(A - A^T)$$

Définition 2.3 : Trace

Soit une matrice carrée. La trace est la somme des éléments diagonaux. Cette application est une forme linéaire

6.3 Produit matriciel

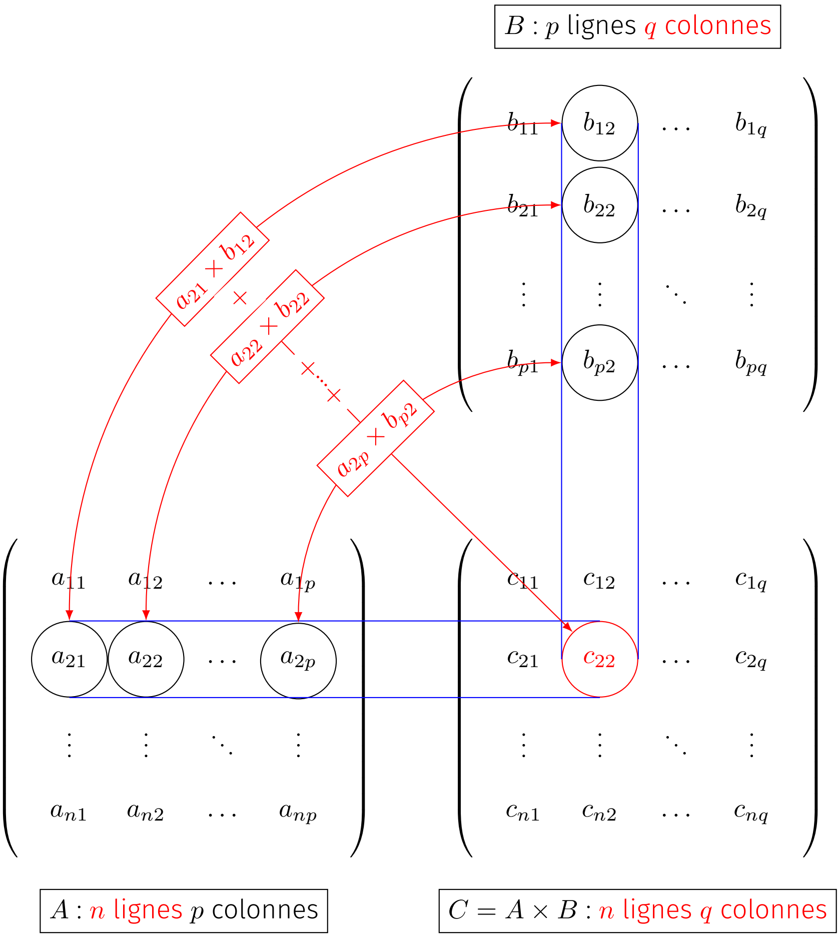
6.3.1 Définition

Définition 3.1 : Produit de 2 matrices

Prenons 2 matrices de tailles quelconques. On appelle produit des matrices A_{pq} et B_{qr} la matrice C définie par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} B_{kj}$$

Le nombre de colonnes de la première doit valoir le nombre de ligne de la seconde. Le résultat sera une matrice avec le même nombre de ligne que la première et le même nombre de colonnes de la deuxième.



Proposition 3.1 : Développement et ordre de multiplication

Soit A_{np}, B_{pq}, C_{qr}.

Alors $(AB)C = A(BC)$. L'ordre n'a pas d'importance.

De plus, $A(B + C) = AB + AC$.

Proposition 3.2 : Commutativité / intégrité

Il n'est ni commutatif ni intègre : On a pas AB = BA même quand les 2 produits sont définis.

Si AB = 0, cela n'implique pas A est nul ou B est nul.

AB = AC n'implique pas que B = C.

Proposition 3.3 : transposition / trace

$(AB)^T = B^T A^T$

$tr(AB) = tr(BA)$

6.3.2 Produit de matrices carrée

Définition 3.2 : Polynômes de matrice

On prend une matrice carrée et un polynôme. Le polynome de la matrice est toujours une matrice carrée.

Définition 3.3 : Matrice nilpotente

Une matrice carrée est dite nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N},$ tel que $A^k = 0$

Définition 3.4 : Matrices commutantes

Pour ces matrices là, on peut appliquer la formule du binome de Newton.

Soit 2 matrices carrées. On dit que A et B commutent si $AB = BA$. On a alors $\forall m \in \mathbb{N}, (A+B)^m = \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}$.

6.3.3 Lien entre produit matriciel et systèmes linéaires

Soit S_A le système linéaire de p équations à q inconnues. Il est de la forme $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_4 + \cdots + a_{1q}x_q = y_1, \ldots a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q = y_p$.

On pose $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_p \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_q \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1q} \\ a_{p1} & \ldots & a_{pq} \end{bmatrix}$

Il faut trouver X tel que $AX = Y$

Définition 3.5 : Application de matrice

Pour A, on pose $f_a : X \in \mathcal{M}_Q(\mathbb{R}) \rightarrow AX\mathcal{M}(\mathbb{R})$ qui est une application linéaire

Proposition 3.4 : Propriétés des applications de matrice

- Le système S_A admet au moins une solution $\iff$ f_a est surjective.
- Si la fonction est injective, le système admet au plus une solution.
- Si la fonction est bijective, le système admet exactement une soltion.
- si $q > p$ (plus d'inconnues que d'équation), f n'est pas injective et si le système admet une solution, il en admet une infinité.
- Si $q < p$ (plus d'équations qu d'inconnues), f n'est pas surjective et il existe des y tels que le système n' a pas de solution.

6.3.4 Matrice inversible

Définition 3.6 : Matrice inversible

Soit A carrée. dit que A est inversible si $\exists B$ de meme taille telle que $AB = BA = I_d$. Dans ce cas, B est unique, et notée A^{-1}.

On appelle le groupe linéaire, noté $GL_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille p. Ce n'est pas un sev.

Proposition 3.5 : Inversibilité et application de matrice

Soit A carrée. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes

- $A \in GL_p(\mathbb{R})$ (A est inversible)
- $f_A : X \in \mathcal{M}_p \rightarrow AX \in \mathcal{M}_{p,1}$ est bijective
- $\exists B \in M_p, AB = I_d$

Proposition 3.6 : Transposition et inversibilité

Soit A une matrice inversible.

Alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Proposition 3.7 : Commutativité si A inversible et B et C carrées

Soit A inversible et B et C carrées

$AB = AC \Rightarrow B = C$

Proposition 3.8 : Consition nécessaire d'Inversibilité

Si A a une colonne/ligne remplie de 0, elle n'est pas inversible

Proposition 3.9 : Critère d'inversibilité pour matrice 22

Soit A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Alors A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B$

Théorème 3.1 : Inversibilité et base

A est inversible ssi $C_1, C_2 \ldots C_p$ est une base de M_{p1} ou ssi $L_1, L_2 \ldots L_p$ est une base de $M_{1,p}$ avec C les matrices colonnes et L les matrices lignes

Si une colonne s'écrit en focntion des autres, cela ne peut pas etre inversible.

6.3.5 Algorithme pour calculer un inverse

6.3.6 Rang d'une matrice

Définition 3.7 : Rang

Soit $A \in M_{p,q}, f_A : X \in M_{q,1}(\mathbb{R}) \to AX \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

On appelle rang de la matrice A l'entier noté $rg(A)$ définit par $rg(A) = rg(f_A)$

Proposition 3.10 : Calcul du rang

$rg(A) = \dim(Vect(C_1, C_2, \dots, C_3)) = rg(A^T) = \dim(Vect(L_1, L_2, \dots, L_p))$.

Proposition 3.11 : Inversibilité et rang

Soit A une matrice carrée. Elle est invsersible $\iff rg(A) = p$

Chapitre 7

Matrices d'applications linéaires

Dans tous ce chapitre, E et F sont deux EV de dimension finie, avec $\dim(E) = p, \dim(F) = n$

7.1 Matrices d'application linéaire (MAL)

Définition 1.1

- $f \in L(E, F)$
- $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E
- $B_a = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de F
- On note c_j les applications coordonnées sans la base B_a (i.e : $\forall u \in F, u = c_1(u)v_1 + \cdots + c_n(u)v_n$)

On appelle matrice de l'application linéaire f dans les bases B, B_a notée $M_{B,B_a}(f)$ la matrice de $M_{np}(\mathbb{R})$ définie par $M_{B,B_a}(f)_{ij} = c_i(f(e_j)), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, p\}$

Proposition 1.1

Soit B une base de E, B_a une base de F, et $F \in L(E, F)$. La connaissance de $M_{B,B_a}(f)$ est équivalent à connaitre f.

7.2 Opérations

Proposition 2.1 : Linéarité des MAL

Soient f et g deux éléments de $L(E, F)$, B est une base de E, B_a est une base de F, $\lambda \in R$.

- $M_{B,B_a}(f+g) = M_{B,B_a}(f) + M_{B,B_a}(g)$
- $M_{B,B_a}(\lambda f) = \lambda M_{B,B_a}(f)$

Proposition 2.2 : MAL composées

Soient $f \in L(E, F), g \in L(F, G)$,, B une base de E, B_a une base de F, B_b une base G

Alors $g \circ f \in L(E, G)$ et $M_{B,B_b}(g \circ f) = M_{B_a,B_b}(g)M_{B,B_a}(f)$

7.2.1 Matrices d'endomorphisme

$f \in L(E), B, B_a$ 2 bases de E. Alors $M_{B,B_a} \in M_{pp}(\mathbb{R})$

Notation : $M_B(f) = M_{B,B}(f)$

Proposition 2.3 : Mise à la puissance de MAL

$f \in L(E), q \in \mathbb{N}, f^q = f \circ f \circ f \ldots$

$M_B(f) = M_B(f)^q$

7.2.2 Matrices d'un isomorphisme

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 2.4 : Propriétés des MAL pour les isomorphismes

$f \in L(E, F), M_{B,B_a}(f) \in M_p(\mathbb{R})$.

f est un isomorphisme $\iff M_{B,B_a}(f)$ est inversible

Si f est un isomorphisme, $M_{B_a,B}(f^{-1}) = M_{B,B_a}(f)^{-1}$

Soit $f \in L(E), B$. f est bijective $\iff M_B(f)$ est inversible et $M_B(f^{-1}) = M_B(f)^{-1}$

7.2.3 Image d'un vecteur : changement de base

Soit $B = (e_1, \dots, e_p), c_j$ l'application coordonnées. $B_a = (v_1, \dots, v_n)$ et $c_{a,j}$ les applications coordonnées

Proposition 2.5

On pose, pour $u \in E$ $X = \begin{bmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ \dots \\ c_p(u) \end{bmatrix}$ $, Y = \begin{bmatrix} c_{a,1}(f(u)) \\ c_{a2}(f(u)) \\ \dots \\ c_{ap}(f(u)) \end{bmatrix}$. Alors$Y =$ $M_{B,B_a}(f)X$

Définition 2.1 : Matrices de changement de base

Soit B et B_a 2 bases de E. On appelle matrice de passage de la base B à la base B_a la matrice $M_{B_a,B}(I_d)$

Proposition 2.6

Posons $B = (v_1, \dots, v_p), c_j$ les applications coordonnées dans la base B. Notons $M_{B_a,B}(Id_e) = (c_1, \dots, c_p)$. Alors $(c_k)i = c_i(v_k)$

Proposition 2.7

$M_{B_a,B}(Id_E)$ est toujours inversible et $M_{B_a,B}(I_dE)^{-1} = M_{B,B_a}(Id_E)$

Proposition 2.8

Soient B et B_a, c_{aj} les applications coordonnées dans la base B.

Soit $u \in E, X = \begin{bmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ \dots \\ c_p(u) \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1(u) \\ \bar{c}_2(u) \\ \dots \\ \bar{c}_p(u) \end{bmatrix}$. Alors $\bar{X} = M_{B,\bar{B}}(Id_E)X$

Proposition 2.9 : Formules de changement de base

Soient $B_1, B_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2, f \in L(E, F)$. Alors

$M_{B_2,\bar{B}_2}(f) = M_{\bar{B}_1,\bar{B}_2} M_{B_1,\bar{B}_1}(f) M_{B_2,B_1}(Id_E)$

Proposition 2.10

B_1, B_2 2 bases de E, $P = M_{B_1,B_2}(Id_E)$. Alors $M_{B_2} = PM_{B_1}P^{-1}$