8

Chapitre

Déterminant

8.1 Application p-linéaires

Définition 1.1 : Application p-linéaire

Soient E et F deux R-EV et $L : E^p \to F$. On dit que L est p-liénaire si elle est linéaire en chacune de ses variable, i.e. $\forall(u_1, \dots, u_{p-1} \in E^{p-1}), \forall I \in \{1, \dots, p\}, L_I : v \in E \to L(u_1, \dots, u_{I-1}, v, \dots u_I, \dots, u_{p-1})$.

Exemple : Toute application linéaire de E dans F est 1-linéaire

Dans $\mathbb{R}^3$, el produit scalaire : $L : (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \times R^3 \to x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ est 2 linéaire.

En effet, fixons $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $(x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$L(\lambda(x_1, x_2, x_3) + (x_4, x_5, x_6), (y_1, y_2, y_3)) = L((\lambda x_1 + x_4, \lambda x_2 + x_5, \lambda x_3 + x_6), (y_1, y_2, y_3)) = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3) = \lambda L() + L()$

Il faut montrer la linéairité avec l'autre variable pour que la preuve soit complète.

Proposition 1.1 : Application p-linéaire d'un vecteur nul

Soit une application p-linéaire

si on met en position i le vecteur nul, le résultat est le vecteur nul de l'espace d'arrivé.

Définition 1.2 : Forme p-linéaire

L est une forme p-linéaire si l'espace d'arrivé est l'espace des réels.

Définition 1.3 : Forme p-linéaire alternée (FPA)

Soit L une forme p-linéaire. L est alternée si $\forall(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$, si $\exists(i \neq j)$ tel que $u_i = u_j$, alors $L(u_1, \ldots, u_p) = 0$

Proposition 1.2 : Caractérisation d'une forme p-linéaire alternée

Soit $L : E^p \to \mathbb{R}$ une forme p-linéaire alternée. Soit $\forall(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ $\forall(i,j) \in \{1, \ldots, p\}$. Alors $L(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -L(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$

Proposition 1.3 : Famille liée dans une FPA

Soit E un ev et L une forme p-linéaire alternée sur E. $\forall(u_1, \ldots, u_p)$ famille liée de E, alors $L(u_1, \ldots, u_p) = 0$

8.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

8.2.1 En dimension 2

Soit E un REV de dimension 2, $B = \{e_1, e_2\}$.

Proposition 2.1 : Forme linéaire en dimension 2

Soit L une forme 2-linéaire alternée. Alors $\forall u = a_1 + be_2, \forall v = \alpha e_1 + \beta e_2, L(u,v) = (a\beta - \alpha b)L(e_1, e_2)$. Ainsi, la connaissance de $L(e_1, e_2)$ équivaut à connaitre L

Définition 2.1 : Déterminant en dimension 2

Posons $L_B : (u,v) \to a\beta - \alpha b$. C'est l'unique forme 2-linéaire alternée vérifiant $L(e_1, e_2) = 1$. On l'appelle le Déterminant en base B, noté $\det_B$.

Proposition 2.2 : Forme linéaire (d2) et déterminant

Soit L une forme 2-linéaire alternée, alors $L(u, v) = \det_b(u, v)L(e_1, e_2)$

Proposition 2.3 : Déterminant et base

Soit (u,v) une famille de E. (u,v) est une base de E $\iff$ son Déterminant dans la base B est $\neq 0$

Proposition 2.4 : Multiplication de det de 2 bases

Soit B et C 2 bases de E. $det_B(b_1, b_2)det_C(e_1, e_2) = 1$

8.2.2 En dimension 3

E un ev de dimension 3, B = b_1, b_2, b_3 une base de E.

Proposition 2.5

Soit L une forme 3-linéaire alternée et $u_2, u_2, u_3 \in E$ tel que $\forall i \in \{1.2.3\}, u_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki} b_k$. On a

$L(u_1, u_2, u_3) = (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32})$

Définition 2.2

On note $L(u_1, u_2, u_3) = (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32})$ le déterminant est base B.

Proposition 2.6

$\forall L$ formes 3-linéaires alternées, $L(u, v, w) = L(b_1, b_2, b_3)det_B(u, v, w)$

et det_B est l'unique fome 3-linéaire alternée vérifiant $det_B(b_1, b_2, b_3) = 1$

Proposition 2.7

Soit (u, v, w) une famille de E. C'est une base de E $\iff det_B(u, v, w) \neq 0$.

Soit $C = (c_1, c_2, c_3)$ une base de E. $1 = det_B(c_1, c_2, c_3)\,\det_C(b_1, b_2, b_3)$

8.2.3 Dimension quelconque

E est un ev de dimension p, B une base de E

Théorème 2.1 : admis

Il existe une unique forme p-linéaire alternée, notée det_B est appelée déterminant en Base B, vérifiant :

$det_B(b_1, \dots, b_p) = 1$

$\forall L$ forme p-linéaire alternée, $\forall$ famille de vecteurs de E, $L(u_1, \dots, u_p) = det_B(u_1, \dots, u_p)L(b_1, \dots, b_p)$.

Proposition 2.8

Soit une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E. C'est une base $\iff det_B(u_1, u_2, \dots, u_p) \neq 0$

Proposition 2.9

Soit C une base de E. $det_B(c_1, \dots, c_p)\,\det_C(b_1, \dots, b_p) = 1$.

Proposition 2.10

Soit une famille de p-1 vecteurs de E.

$u_k = \sum_{m=1}^{p} \alpha_{mk} b_m$. Posons $v_k = u_k - \alpha_{ik} b_i$. Si on note $C_I = (b_1, \dots, i-1, b_{i+1}, b_p)$. On a $v_k \in Vect(C_i$.

Alors $det_B(u_1, \dots, u_{j-1}, b_i, u_j, \dots, u_{p-1}) = (-1)^{i+j} det_C(v_1, \dots, v_{p-1})$

Proposition 2.11

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p, u_k = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{lk} b_l$. Soient $(I, J) \in \{1, \dots, p\}$. On pose $B_i = (b_1, \dots, b_{I-1}, b_{I+1} n \dots, b_l)$ et $u_k^i = u_k - \alpha_{ik} b_I \in vect(B_i)$. Alors $det_B(u_1, \dots, u_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} det_{B_i}(u_1^I, \dots, u_{J-1}^I, u_{J+1}^I, \dots, u_p^I)$

Proposition 2.12

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p, u_k = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{lk} b_l$. Soient $(I, J) \in \{1, \dots, p\}$. On pose $B_i = (b_1, \dots, b_{I-1}, b_{I+1} n \dots, b_l)$ et $u_k^i = u_k - \alpha_{ik} b_I \in vect(B_i)$. Alors $det_B(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} det_{B_i}(u_1^I, \dots, u_{J-1}^I, u_{J+1}^I, \dots, u_p^I)$

Proposition 2.13

Soit E et F 2 EV de même dimension finie = p.

Soit B une base de E et C une base de F. On pose $\phi \in L(E, F)$ par $\phi(b_i) = \mu_i$. Alors $\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, det_B(u_1, \dots, u_p) = det_C(\phi(u_1), \dots, \phi(u_p))$

8.3 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3.1 : Déterminant d'endomorphisme dans plusieurs bases

Soit E un EV de dimension p, B et C 2 bases de E. Soit $f \in l(E)$. Alors $det_B(f(b_1), \dots, f(b_p)) = det_C(f(e_1) \dots, f(e_p))$

Définition 3.1 : Déterminant de l'endomorphisme

Noté $det(f)$, c'est le réel $det_B(f(b_1), \dots, f(b_p))$ avec $B = (b_1, \dots, b_p)$ une base quelconque

Proposition 3.1 : Déterminant de vecteurs par endomorphisme et déterminant d'endomorphisme

$\forall (u_1, \ldots, u_p), det_B(f(u_1), \ldots, f(u_p)) = det(f)det_b(u_1, \ldots, u_p)$

Proposition 3.2 : Propriétés des det d'endomorphisme

1. Soient 2 endomorphismes. $det(f \circ g) = det(f) \times det(g)$
2. $det(I_d) = 1$
3. $f \in L(E)$. f est bijectif $\iff$ $det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $det(f^{-1}) = det(f)^{-1}$

Rappel

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. On note $f_A : X \in M_p(\mathbb{R}) \to AX$. $f_A \in L(M_p(\mathbb{R}))$

Définition 3.2 : déterminant d'une matrice d'application linéaire

On appelle dtéerminant de A, noté $det(A)$ le réel $det(f_A)$

Proposition 3.3 : Propriétés de déterminants d'applications linéaires

1. $det(AB) = det(A)det(B)$
2. $det(Id) = 1$
3. A est inversible $det(A) \neq 0$. Alors, $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Notons e_k la matrice colonne remplie de 0 sauf en k où il y a un 1 et $(E) = (E_1, \ldots, E_p)$ la base canonique de $M_{p1}(\mathbb{R})$.

Proposition 3.4

Soit $A \in M_p(\mathbb{R}), A = [C1, C_2, \ldots, C_p]$ où C_k est la k-eme colonne de A. Alors $det(A) = det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_p)$.

Exemple : On prend p réels λ_i et D la matrice avec les p réels sur la diognale et 0 sur les autres endroits. On a $det(D) = \Pi_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Théorème 3.2 : Lien entre déterminant de fonction et de matrice de fonction

Soit E un ev de dimension p, B une base de E, $f \in L(E)$ et $A = Mat_B(f)$. Alors $det(f) = det(Mat_B(f)) = det(A)$

Pour IJ fixé, on note $R_{ij} : A \in M_p \to M_{p-1}$. (On enlève la ligne I et la colonne J)

Proposition 3.5 : Développement du déterminant de matrice par rapport à une ligne

Soit une matrice carrée et on fixe I une ligne. Alors $det(A) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{I+j} A_{ij} det(R_{ij} A)$

Proposition 3.6 : Développement du déterminant de matrice par rapport à une colonne

Soit une matrice carrée et on fixe J une colonne. Alors $det(A) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{I+j} A_{ij} det(R_{ij} A)$

Proposition 3.7 : Déterminant d'une matrice et de sa transposée

$det(A) = det(A^T)$.

Proposition 3.8 : Sert à rien sauf pour la prochaine propriété

Soit B une base de E et une famille de vecteurs de E. On pose f définie par $f(b_i) = u_i$,. Alors $det(f) = det(u_1, \dots, u_p)$

Proposition 3.9 : Corollaire

Soit B une base de E et une famille de vecteurs u de E. On pose $u_j = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} b_k$ et on définit $A \in M_p(\mathbb{R}) : A_{ij} = a_{ij}$. On remarque que chaque colonne comporte les coordonnées de chaque vecteurs de la famille dans la base. Alors $det(B(u_1, \ldots, u_p) = det(A))$. En particulier, $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base ssi A est inversible.

On a ainsi une nouvelle manière de dire si la famille est une base.

π **Définition 3.3 :** Comatrice

On appelle comatrice de A, matrice carré la matrice définie par $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(R_{ij(A)})$

π **Proposition 3.10 :** Formule théorique

$A \cdot Com(A)^T = det(A)I_p$, donc $A^{-1} = \frac{Com(A)^T}{det(A)}$

À ne pas utiliser en pratique

8.4 Calcul pratique

π **Proposition 4.1 :** Déterminant d'une matrice 22

Le déterminant d'une matrice 22 est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

π **Proposition 4.2**

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_p$$

Proposition 4.3 : Déterminant de matrices triangulaires

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ . & \lambda_2 & 0 \\ . & . & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_p$$

Proposition 4.4 : Propriétés calculatoires du détermiant de matrice

On prend une matrice carrée A que l'on écrit sous la forme de matrice de matrice colonne ou ligne.

- $\begin{vmatrix} C_1 & \dots & \lambda C_i & C_p \end{vmatrix} = \lambda det(A)$
- $\begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots C_i & \dots & C_p \end{vmatrix} = -1 det(A)$
- $\begin{vmatrix} C_1 & \dots & \lambda C_i + \lambda C_j & C_p \end{vmatrix} = det(A)$: pratique car permet de faire apparaitre des 0.
- Cela vaut pour les lignes également