Chapitre

1

Raisonnement, ensembles, applications

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Ensemble

Théorème 1.1 : Ensemble

Un ensemble est constitué d'éléments et est défini par une relation d'appartenance

Remarque sur l'appartenance d'un ensemble à lui-même

Un ensemble n'est jamais élément de lui même.

1.1.2 Éléments de logique propositionnelle

Assertions

Assertion : Une phrase grammaticalement correcte dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse

Opérations logique

Négation : $\neg$

Et : $\wedge$

Ou : $\vee$

P	Q	P et Q	P ou Q	P $\Rightarrow$ Q	P $\iff$ Q	$\neg P$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Si la première assertion est fausse, une implication est toujours vraie

Règles de calcul

- $\neg(\neg P) = P$
- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
- $P \iff Q = \neg P \vee Q$
- $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$ ×
- $\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x)$

Contraposée

Contraposé : $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\forall x, y \in R,\ x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \iff x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

Prédicat

$P(x_1 \dots x_r)$ est un prédicat si c'est une phrase correcte qui dépend de variables et dont on peut dire la valeur de vérité pour tout k-uplet donné.

Astuce

Ce sont des assertion sauf que l'on a pas défini les variables. On peut les transformer en assertions avec des quantificateurs

1.2 Raisonnements

1.2.1 Tautologie et contradiction

Théorème 2.1 : Tautologie

Formule propositionnelle toujours vraie

Théorème 2.2 : Contradiction

Formule propositionnelle toujours fausse

1.2.2 Par récurrence

On veut démontrer des assertions où $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.3 : Proposition

Si $(P(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Exemple : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$

Soit $H(n) = n < 2^n$.

Je démontre $H(n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

$H(0) : 0 < 2^0 = 1$, donc $H(0)$.

Hérédité

On suppose $H(n)$, montrons $H(n+1)$, ie $n+1 < 2^{n+1}$.

D'après $H(n)$, $n+1 < 2^n + 1$. Or $n < 2^n$, d'où $n+1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Donc $H(n+1)$ et $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.

Conclusion

- $H(0)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) \Rightarrow H(n+1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : n < 2^n$.

1.2.3 Récurrence à 2 pas

Théorème 2.4 : Déf

Si $(P(0) \wedge P(1)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2))$, alors $P(n)$.

1.2.4 Récurrence forte

Théorème 2.5 : définition

Si $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, [\forall \mathbb{R} \in \{0, \ldots, n\}, P(k) \Rightarrow P(n+1)])$, alors $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

1.3 Théorie des ensembles

Théorème 3.1 : Égalité d'Ensemble

Soit E et F 2 ensembles. Ils sont égaux ssi $\forall x, x \in E \iff x \in F$. On écrit alors E = F.

Théorème 3.2 : Inclusion

E est inclu dans F ssi $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$. On écrit alors $E \subset F$. E est un sous ensemble de F

Remarque : $E \not\subset F \iff \exists x, x \in E \wedge x \notin F$

Axiome 3.1 : Ensemble vide

Il existe un ensemble appelé ensemble vide noté $\varnothing$, tel que $\forall x, x \notin \varnothing$. Ce dernier est unique

Axiome 3.2 : Parties de E

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble E est un Ensemble E, que l'on note P(E)

Axiome 3.3 : Collection des x de E qui vérifient P(x)

Soit E un Ensemble, Soi P(x) un prédicat défini sur E, alors la collection des x de E qui vérifient P(x) est un ensemble. On le note $(x, x \in E \wedge P(n))$

Théorème 3.3 : Conséquence

Soit E et F 2 ensembles.

l'intersection de E et F, noté $(E \cap F) = \{x, x \in E \wedge x \in F\}$ est un ensemble.

La réunion de E et F est défini par $(E \cup F) = \{x, x \in E \vee x \in F\}$ est un ensemble complémentaire F dans E

$E \backslash F = \{x \in E, x \notin F\}$ est un ensemble.

Axiome 3.4 : Produit cartésien

Soit E et F 2 ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble des couples $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$. On le note $\{(a,1);(a,2)\}$

Théorème 3.4 : Propriété

$\varnothing \subset E$ pour tout Ensemble. $\forall x, x \notin E \Rightarrow x \notin \varnothing$ et par contraposé : $x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$.

Exemples

$E = \{1.2\}$

$P(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1,2\}\}$

1.4 Propriétés de l'intersection

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}$.

$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}$.

Théorème 4.1 : Def

Le complémentaire de A dans E, noté $\bar{A}$ est l'ensemble défini par $x \in \bar{A} \iff x \notin A$. Ainsi, $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$.

Théorème 4.2 : Propriétés

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\bar{\varnothing} = E$.

$\bar{E} = \varnothing$.

$\bar{\bar{A}} = A$.

Théorème 4.3 : Definition

Soit I un ensemble, et $\forall i \in I$, soit F_i un ensemble.

$F = (F_i, i \in I)$.

I est appelé ensemble des index.

$\bigcap_{i \in I} = \{x, x \in F_i, \forall i \in I\}$.

$\bigcup_{i \in I} = \{x, \exists i \in I, x \in F_i\}$.

Exemples :

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n] = [-1, 1]$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$ ×

× **Difficulté**
Le contenu de l'ensemble, ici celui du singleton 0 n'a pas besoin d'appartenir à l'ensemble de définition de n, ici $\mathbb{N}^*$.

1.5 Applications

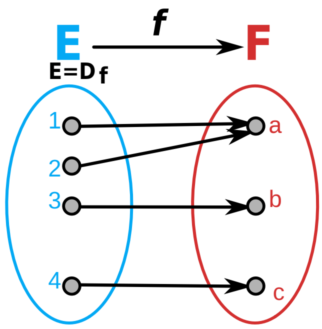
Soient E et F 2 ensembles non vides.

1.5.1 Définition

Théorème 5.1 : Definition

Une application f de E vers F, notée $f : E \to F$ est définie par la donnée d'un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$ qui vérifie la propriété : $\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f$. On écrit alors $y = f(x)$. y est l'image unique de x. x est un antécédent de y.

Exemple : E = {1,2,3,4} et F = {a,b,c}

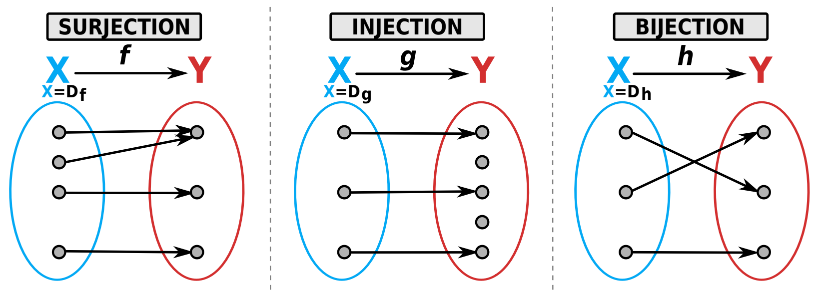


$\Gamma_f = \{(1, c); (2, b); (3, a); (4, b)\}$. On l'appelle le graphe de l'application. E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

Application

$f : E \to F$ est une application si tout élément de E a toujours une unique image dans F.

1.5.2 Injection, surjection, bijection



Théorème 5.2 : Surjectivité

f est surjective de $E \to F \iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \iff$ tout élément de F admet au moins un antécédent dans E.

Théorème 5.3 : Injectivité

f est injective de $E \to F \iff (\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \iff (\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \iff$ tout élément de F a au plus un antécédent dans E.

Théorème 5.4 : Bijectivité

f est bijective de $E \to F \iff (\forall x, x' \in E, \exists! x \in E, y = f(x)) \iff$ tout élément de F a un unique antécédent par f dans E. $\iff$ f est injective et surjective.

Fonction	Injective	Surjective
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Non	Non
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Oui	Non
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Non	Oui
$f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x), \cos(x)$	Non	Oui
$f : [0, 2\pi[\to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$	Oui	Oui

Théorème 5.5 : Définitions

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$, i.e $A \in P(E)$.

L'image directe de A, notée $f(A)$ est l'ensemble défini par : $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.

Soit $B \subset F$. L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble de E défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ (= "tiré en arrière de B")

Exemple :

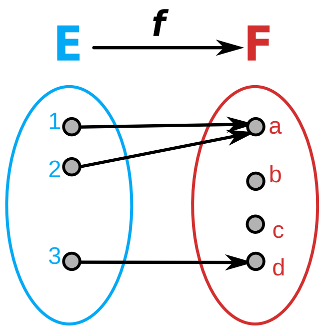


Image directe

$f(E) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, d\}$

$f(\{1\}) = \{a\}$

$f(\{2, 3\}) = \{a, d\}$

$f(\varnothing) = \varnothing$

Image réciproquee

$f^{-1}(F) = E$

Astuce

Cette égalité est toujours vraie par définition d'une application

$f^{-1}(\{a, d\}) = E$

$f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$

$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$

Remarque

$f : E \to F$ est surjective si $f(E) = F$.