2

Chapitre

Suites réelles

2.1 Généralités

2.1.1 Variations

Soit $u \in S(\mathbb{R})$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1 : Suite croissante

La suite est croissante à partir du rang n_0 si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$ et u est stictement croissante à partir de n_0 si $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} > u_n$.

Théorème 1.2 : Suite décroissante

La suite est décroissante à partir du rang n_0 si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$ et u est stictement croissante à partir de n_0 si $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple : $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

$\neg(u_n$ est croissante à partir du premier terme$)= (\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n)$

Théorème 1.3 : Majoré et minorant

La suite est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

La suite est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

La suite est bornée si elle est minorée et majorée.

u bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$

Valeur absolue

$|x| = x$ si $x > 0$ et $-x$ si $x < 0.$

$|x - y|$ mesure la distance e x à y.

$|xy| = |x||y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

$|x| = 0 \rightarrow x = 0$

Utilisation
On utilise Valeur absolue d'une expression pour la majorer par une valeur. Il vaut mieux dire que $|(-1)^n| \leq 1$ que $-1 \leq |(-1)^n| \leq 1$. Utiliser ensuite l'inégalité triangulaire.

2.2 Limites d'une suite

Soit u une suite réelle.

Théorème 2.1 : Définition

On dit que la suite u est convergente (CV) si existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$. On dit que l est une limite de (U_n).

Théorème 2.2 : Unicité d'une limite d'une suite convergente

Si (U_n) est convergente, sa limite l est unique on note $l = \lim_{n+\infty} u_n$.

Théorème 2.3 : Borne d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée

2.3 Limites

2.3.1 Limites et monotonie

Théorème 3.1 :

Toute suite croissante et majorée converge vers son plus petit majorant

Toute suite décroissante et minorée converge vers son plus grand minorant.

2.3.2 Suites adjacentes

Théorème 3.2 : Définition

2 suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si

- (U_n) est décroissante
- (V_n) est croissante
- $\lim\limits_{+\infty} U_n - V_n = 0$
- $u_n \geq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.3 : Définition

Si les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes de même limite.

2.3.3 Limites infinies

Soit (u_n) une suite réelle.

Théorème 3.4 : définition

Elle a pour limite $+\infty$ si $\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$.

Elle a pour limite $-\infty$ si $\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N_A \Rightarrow u_n \leq -A$.

2.3.4 Suites et opérations

On considère 2 suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose que $\lim\limits_{+\infty} = l/\pm\infty$.

Somme des limites

Limite (v_n)	$-\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
l'	$-\infty$	l+l'	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Produit des limites

Limite (v_n) et (u_n)	$-\infty$	l	0	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	signe de $l\times-\infty$	FI	$-\infty$
l'	signe de $l'\times-\infty$	ll'	0	signe de $l'\times+\infty$
0	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	signe de $l'\times+\infty$	FI	$+\infty$

2.3.5 Limites et inégalités

Théorème 3.5 : Inégalités

Supposons que $u_n \leq v_n$. On a : $\lim\limits_{\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\infty} u_n = -\infty$

Si les 2 suites sont convergentes, $\lim\limits_{\infty} u_n \leq \lim\limits_{\infty} v_n$. ×

× **Difficulté**
Les inégalités strictes deviennent larges quand on passe à la limite. Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et u_n converge, alors $\lim\limits_{\infty} u_n \geq 0$.

Théorème 3.6 : Théorème des gendarmes

Si on a 3 suites réelles avec $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si u_n et v_n sont convergentes de même limite l, alors w_n est convergente vers l.

Si une suite est encadrée, la limite de la suite l'est aussi. La limite est un point fixe de (u_n).

Partie entière

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{N}$, tel que $n \leq x < n+1$. C'est noté $E(x) = n$.