2

Chapitre

Suites réelles

2.1 Limites d'une suite

Soit u une suite réelle.

Théorème 1.1 : Unicité d'une limite d'une suite convergente

Si (U_n) est convergente, sa limite l est unique on note $l = \lim\limits_{n+\infty} u_n$.

Preuve 1.1 : Démonstration par l'absurde

Supposons que (U_n) admette l_1 et l_2 comme limite, avec $l_1 \neq l_2$. Nous avons donc, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \epsilon \tag{2.1}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \epsilon \tag{2.2}$$

On pose alors $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$. Il existe donc N_1 et N_2 tel que les 2 assertions sont vraies.

Choisissons un nombre entier supérieur à N_1 et N_2, comme $\max(N_1, N_2)$.

Pour cette valeur de n, nous avons à la fois $|u_n - l_1| < \epsilon$ et $|u_n - l_2| < \epsilon$.

Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$3\epsilon = |l_1 - l_2| = |(u_n - l_2) - (u_n - l_1)| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| \leq 2\epsilon$$

Le nombre réel vérifie à la fois $\epsilon > 0$ et $3\epsilon \leq 2\epsilon$, ce qui est absurde. Donc $l_1 = l_2$.

Théorème 1.2 : Borne d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée

Preuve 1.2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons l sa limite $\in \mathbb{R}$. Elle est convergente $\iff \forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$.

Pour $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 &\Rightarrow |u_n - l| \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq u_n - l \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 + l \leq u_n \leq 1 + l \end{aligned}$$

Donc pour $n \geq N_1, |u_n| \leq \max(|-1+l|, |1+l|)$

Donc pour $n < N_1$, le nombre de terme de (U_n) est fini.

Donc $M = \max(|u_k|)$ existe et est fini, avec $0 \leq k \leq N_1 - 1$ et $|U_n| \leq M, \forall 0 \leq n \leq N_1 - 1$.

2.2 Limites

2.2.1 Suites adjacentes

Théorème 2.1 : Convergence de suites adjacentes

Si les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes de même limite.

Preuve 2.1

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n \geq v_0$ car (v_n) est croissante. Donc (U_n) est décroissante et minorée par v_0 donc convergente. Notons $l_1 = \lim\limits_{+\infty} U_n$.

De même, $\forall n \in \mathbb{N} v_n \leq u_n \leq, u_0$ car (u_n) est décroissante. Donc

(v_n) est croissante et majorée par v_0 donc convergente. Notons $l_2 = \lim\limits_{+\infty} v_n$.

De plus, $\lim\limits_{+\infty} U_n - V_n = 0 = l_1 - l_2 \iff l_1 = l_2$

Donc, si elles sont adjacentes, (U_n) et (V_n) convergent vers un unique l.

Somme des limites

Preuve 2.2 : Somme des limites l et l'

On veut savoir si $\forall \epsilon > 0, \exists ?N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n - (l + l')| < \epsilon$.

On sait que d'après l'inégalité triangulaire, $|u_n + v_n - (l + l')| = |u_n - l + v_n - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$.

Or $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1$, alors $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

De même, $\lim\limits_{\infty} v_n = l'$, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}, n \geq N_2$, alors $|u_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc si $n \geq N_1 + N_2$, alors $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $|v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc $|u_n + v_n - (l + l')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Donc $u_n + v_n$ est convergente et $\lim\limits_{\infty} u_n + v_n = l$.

Produit des limites

Preuve 2.3 : Produit des limites l et l'

Soit $(u_n), (v_n)$ 2 suites convergentes. On veut démontrer que $\lim\limits_{\infty} u_n v_n = \lim\limits_{u} {}_n \lim\limits_{\infty} v_n$. Notons que $\lim\limits_{\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$. On doit démontrer que la définition de la limite existe pour la suite $u_n v_n$, i.e, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n v_n - ll'| \leq \epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ll'| &= |(u_n - l)v_n + lv_n - ll'| \\
&= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \\
&\leq |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|
\end{aligned}$$

(v_n) convergen, donc est bornée, donc, $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} |v_n| \leq M$.

$$\begin{aligned}
&\leq M|u_n - l| + |l||v_n - l'| \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + |l|\frac{\epsilon}{2M + 1 + |l|}
\end{aligned}$$

On a donc :

- $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, donc $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2M}$.
- $\lim\limits_{\infty} v_n = l'$, donc pour $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{2(1+|l|)} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, donc $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2(1+|l|)}$.

Donc $\forall n \geq N_1 + N_2$, on a $|u_n v_n - ll'| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + |l|\frac{\epsilon}{2M+1+|l|}$, puis $|u_n v_n - ll'| \leq \frac{\epsilon}{2} + 1$ et $|u_n v_n - ll'| \leq \epsilon$

On a bien l'inégalité, CQFD

2.2.2 Limites et inégalités

Théorème 2.2 : Théorème des gendarmes

Si on a 3 suites réelles avec $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si u_n et v_n sont convergentes de même limite l, alors w_n est convergente vers l.

Preuve 2.4

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |w_n - l| \leq \epsilon$, avec $\lim\limits_{\infty} u_n = l = \lim\limits_{\infty} v_n$ et $u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|w_n - l| &= |w_n - u_n + u_n - l| \\
&\leq |w_n - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l + l - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l| + |l - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l| + 2|u_n - l| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4}
\end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{4}$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Donc pour $N_3 = N_1 + N_2$, on a : $n \geq N_0 \Rightarrow |w_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \times \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$. Ce qui démontre bien l'égalité souhaitée.