Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Méthodes

2.1.1 Lever une Forme Indéterminée

Du type Infini/Infini

On donne d'abord le type de FI puis on met en facteur le terme variant de plus haut degré en facteur.

Exemple

Voir le 2 et 3 du TD 2.4

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \\ &= \frac{2n(1+\frac{(-1)^n}{2n})}{5n(1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n})} \\ &= \frac{2(1+\frac{(-1)^n}{2n})}{5(1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n})} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \lim\limits_{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} (U_n) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{1}$.

Du type + Infini - Infini avec des racines

On multiplie par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a}-\sqrt{b})\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Exemple

Voir le 4 du TD 2.4

$$\begin{aligned}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}) &= (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\end{aligned}$$

Avec des exponentielles

Les exponentielles dominent les polynômes. Donc On le met en facteur et on utilise la croissance comparée :

Théorème 1.1 : Croissance comparée

$\lim\limits_{+\infty} \frac{n^x}{y^n} = 0.$

2.1.2 Montrer que 2 suites sont adjacentes (2.11)

Montrer que les 2 suites sont définies

Il peut être utile de montrer que les 2 suites sont définies et toujours positives.

Pour cela, on peut faire un raisonnement par récurrence.

Montrer qu'une suite est supérieure à l'autre

On fait la différence $u_n - v_n$ et selon le signe, on conclue.

On étudie la monotonie des suites

Il faut montrer que l'une est croissante et l'autre décroissante. Pour cela, on fait la différence $u_{n-1} - u_n$ et on conclue, pareil pour (v_n).

Montrer que les suites sont convergentes

Une suite est croissante et majorée par le premier terme de l'autre suite; l'autre suite est décroissante et minorée par le premier terme de la première suite.

Les deux suites sont convergentes et on note l et l' leur limite respective.

Montrer que l=l'

Les 2 suites sont convergentes, donc en exprimant la limite du terme $n+1$ d'une suite en fonction de l'autre suite, on peut montrer que $l = l'$.

Conclusion

Toutes les conditions sont réunies pour dire que les 2 suites sont adjacentes.

Exemple

Énoncé

On pose $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. On a : $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
On veut montrer que les suites sont adjacentes.

1. On montre d'abord que les suites sont positives, par récurrence :
   L'initialisation est immédiate d'après l'énonce ($a_0 > 0$ et $b_0 > 0$).
   Hérédité : On suppose (H_n). Donc $u_n > 0$ et $v_n > 0$. On a alors : $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$. De plus, $\frac{1}{u_n} > 0$ et $\frac{1}{v_n} > 0$
   Donc la suite est bien définie et supérieure à 0.
2. On montre qu'une suite est supérieure à l'autre.
   On a $u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{v_n+u_n}$, donc la différence $u_{n+1} - v_{n+1}$ vaut :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{2u_n v_n}{v_n + u_n} - \frac{u_n + v_n}{2} \\
&= \frac{4u_n v_n}{2(v_n + u_n)} - \frac{(u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - (u_n + v_n)^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - (u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2)}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - u_n^2 - 2u_n v_n - v_n^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{-(-2u_n v_n + u_n^2 + v_n^2)}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{-(u_n + v_n)^2}{2(v_n + u_n)} \leq 0
\end{aligned}
$$

Donc $v_n \geq u_n$

3. On étudie la monotonie de (v_n) et (u_n) : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$
   Mais $v_n \geq u_n$, donc $\frac{u_n+v_n}{2} - v_n \leq 0$

   De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(-u_n+v_n)}{u_n+v_n} \geq 0$, car comme $v_n \geq u_n$, on a $-u_n + v_n \geq 0$

4. On montre que les suites sont convergentes (u_n) est majorée par v_1 et est croissante, donc elle convergente et on note l sa limite.

   (v_n) est minorée par u_1 et est décroissante, donc elle convergente et on note l' sa limite.

5. On montre que $l = l'$
   On sait que $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\infty} u_{n+1} &= \lim_{\infty} \frac{u_n + v_n}{2} \\
l' &= \frac{l + l'}{2} \\
&= l
\end{aligned}
$$

Les 2 suites sont bien adjacentes.

2.1.3 Utiliser la définition de la convergence (2.10)

Montrer qu'une suite est inférieure à un certain nombre supérieur à sa limite

Soit $\lim\limits_{+\infty} = l$. On souhaite montrer que $u_n \leq x$.

D'après la définition de la limite, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |U_n - l| \leq \epsilon$.
Donc :

$$
\begin{aligned}
& u_n - l \leq \varepsilon \\
\iff & -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \\
\iff & l - \varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon + l
\end{aligned}
$$

Ainsi, en prenant ε tel que $l + \varepsilon = x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq x$.

2.1.4 Exercice type : Montrer qu'une suite converge (2.6/2.12)

Encadrer la suite

On trouve un majorant et un minorant de la suite, souvent par récurrence. Si la suite est positive, un minorant est 0.

On montre qu'elle est croissante/décroissante

On montre sa convergence

On déduit qu'elle est convergente et, comme on sait que la limite est un point fixe, on peut écrire que $\lim\limits_{\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{\infty} u_n = l$ et déterminer l à l'aide de cette relation.

> **Exemple**
>
> On a : $u_{n+1}^2 = 1 + u_n$. On peut donc écrire : $l^2 = 1 + l$ Seul le nombre d'or τ vérifie cette relation, donc $l = \tau$