3

Chapitre

Fonctions

3.1 Précisions sur les applications réciproques

Une application est bijective de $E \to F$ si $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

On définit une application, appelée réciproque notée $f^{-1} : F \to F$ et $y \longmapsto x = f^{-1}(y)$, avec $\forall y \in F, x = f^{-1}(y) \iff x \in E$ et $y = f(x)$. f est bijective donc f^{-1} est une application.

Propriétés :

- $f \circ f^{-1}(y) = y = Id_F$
- $f^{-1} \circ f(x) = x = Id_E$
- $f \circ Id_E = f$: Id_E est le neutre à droite pour o
- $Id_E \circ f = f$: Id_E est le neutre à gauche pour o

En effet, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

Théorème 1.1 : Proposition

Soit $f : E \to F$ une application. S'il existe $g : F \to E$ une application telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors f est bijective et g est la réciproque de f.

Théorème 1.2 : Corrolaire

Si l'application réciproque existe, elle est unique

Exemple : $Id : R \to R$. $Id_R(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Conséquence

On peut donc montrer qu'une application est bijective en exhibant sa réciproque

Théorème 1.3 : Proposition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \Rightarrow G$ deux applications bijectives. $g \circ f : E \to F \to G$ et $x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$ Alors $g \circ f$ est bijective.

Théorème 1.4 : Proposition

Soit $f : E \to F$ bijective et notons $f^{-1} : F \Rightarrow E$ sa réciproque. Alors f^{-1} est bijective de réciproque f.

3.2 Généralités sur les fonctions de R dans R

3.2.1 Ensemble de définition

Théorème 2.1 : Ensemble de définition

Soit f de R dans R une fonction. Le domaine de définition de f est l'ensemble, noté $Df = \{x \in R, f(x)\text{existe}\}$ Alors, $Df \to R$ est une application.

Théorème 2.2 : Proposition

Soit $f : I \to R$, si f est strictement monotone sur I, alors f est injective de I sur R.

3.2.2 Fonctions majorées et minorées

Soit $f : R \to R$ Soit $I \in D_R$.

f est majorée sur I s'il existe $M \in R, \forall x \in I, f(x) \leq M$.

f est minorée sur I s'il existe $m \in R, \forall x \in I, f(x) \geq m$.

Montrer que la fonction est non majorée

On montre que $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$.

3.2.3 Image directe et image réciproque

On se donne $f \in F(R, R)$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $f(I) = \{f(x), x \in I\} = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, y = f(x)\}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. $f^{-1}(J) = \{x \in D_f, f(x) \in J\} = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, y = f(x)\}$.

3.3 Limites d'une fonction en un point ou en l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

3.3.1 Limite en un point

f doit être définie sur un voisinage épointé de x_0

Voisinage épointé

Voisinage épointé de x_0

Un intervalle ouvert contenant x_0, privé de x_0. On le note V_{x_0}. $V_{x_0} =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\setminus \{x_0\}$

f a une limite finie si :

elle est définie sur un voisinage épointé de x_0 et pour toute suite (u_n) est convergente vers x_0 et à valeurs de x_0,

$$\lim_{\infty} f(u_n) = l$$

avec (u_n) tend vers x_0.

Cela équivaut à : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

Limites infinies

f a une limite valant $+\infty$ si :

- pour toute suite (u_n) à valeurs dans V_{x_0} et de limite x_0, on a :

  $\lim\limits_{\infty} f(u_n) = +\infty$

- $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

De même en $-\infty$:

- Pour toute suite (u_n) à valeurs dans V_{x_0},

  $\lim\limits_{\infty} f(u_n) = -\infty$

- $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$ -

3.3.2 Limites en + l'infini

On se donne f définie au voisinage de $+\infty$: $\exists a \in \mathbb{R}$, f est définie sur $]a, +\infty[$.

Limite finie l

$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Limite + infinie

$\forall A > 0, \exists R > 0, x > R \Rightarrow f(x) > A$.

Limite - infinie

$\forall A > 0, \exists R > 0, x > R \Rightarrow f(x) < -A$.

3.3.3 Limites en - l'infini

On se donne f définie au voisinage de $-\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, f est définie sur $]-\infty, A[$.

Limite finie l

$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, x < -R \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Limite + infinie

$\forall A > 0, \exists R > 0, x < -R \Rightarrow f(x) > A$.

Limite - infinie

$\forall A > 0, \exists R > 0, x < -R \Rightarrow f(x) < -A$.

3.4 Fonctions continues

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est définie sur I.

Théorème 4.1 : Définitions

f est continue en x_0 si

- $\lim\limits_{x \to x_0} f = f(x_0)$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall (U_n), \lim\limits_{\infty} f(U_n) = f(x_0)$. On a donc : $\lim\limits_{\infty} f(U_n) = f(\lim\limits_{\infty} U_n)$

3.5 Continuité et opérations

On prend 2 fonctions f et g continues sur I. Alors $f + g, fg$ sont continues sur I et $\frac{f}{g}$ est continue en tout point de I tel que $g(x) \neq 0$.

Théorème 5.1 : Continuité des composées

Soient $f : I \to J$ une fonction continue sur$I$, à valeurs dans $I \in \mathbb{R}$ et $g : I \to J \in \mathbb{R}$. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

3.5.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.2 : TVI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(a \leq b) \in I$. On suppose f continue sur $[a, b]$.

Alors $\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a, b], y_0 = f(x_0)$.

Théorème 5.3 : Variante du TVI

Il est équivalent à :

si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$.

3.5.2 Théorème de Heine

Théorème 5.4 : Théorème de Heine

L'image continue d'un intervalle fermé et borné est un intervalle fermé et borné.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continue sur $[a, b]$,

$\exists m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}, m \leq M$ tels que $f([a, b] = [m, M]$ avec $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = m$ et $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = M$

3.5.3 Réciproque d'une application continue strictement monotone

Théorème 5.5 :

Si f est continue sur $[a, b]$ et strictement monotone sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $J = [f(a), f(b)]$ et $f^{-1} : J \to I$ sa réciproque, de même monotonie sur J

Elle donne plus d'informations que le TVI et est à privilégier. [i]

> **i Info**
> En effet, le TVI indique qu'il existe x tel que $f(x) = c$ avec c dans l'intervalle de continuité. Ce théorème indique lui qu'il existe une unique solution dans l'intervalle mais il faut que la fonction soit monotone sur l'intervalle considéré.

3.6 Fonctions dérivables

Théorème 6.1 : Définitions

Soit $x_0 \in [a, b]$.

f est dérivable en x_0 si

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(x_0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
- $\exists l$ et une fonction $\varepsilon(x)$ dont la limite en a est nulle, tels que $f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

Théorème 6.2 : Dérivée de la réciproque

On donne un intervalle $I, J \in \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. On suppose f dérivable sur I et que f est bijective de $I \to J$. On note $f^{-1} : J \to I$ la réciproque. Elle est dérivable en $y_0 \in J \iff f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$

On a alors : $(f^{-1})'_{y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$ avec $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

3.7 Théorème des accroissements finis et de Rolle

$a < b$

Théorème 7.1 : Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Théorème 7.2 : Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$