Chapitre 3

Fonctions

3.1 Méthode

3.1.1 Montrer la limite finie d'une fonction en un point x_0

On doit montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$. Pour un ε donné, il faut donc trouver un α.

Pour ce faire, on conserve dans la fonction ce qui tend vers 0 quand $x \to x_0$ et on majore en valeur absolue la limite du reste par une quantité dépendante de x_0 et non x.

Le but est d'obtenir une expression de α en fonction de ε.

Exemple : Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 \to x_0^2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists ? \alpha > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

$f(x) - l = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$

$x - x_0$ tend vers 0 et on veut montrer que $(x + x_0)$ est majorée par une quantité indépendante de x.

On pose $k_0 = \max(|x_0 - 1|; |x_0 + 1|) > 0$.

Donc, si $x \in]x_0 - 1; x_0 + 1[\iff |x - x_0| < 1$, on a $|x + x_0| \leq 2k_0$.

Donc $|x - x_0||x + x_0| \leq 2k_0|x - x_0| < \varepsilon$ et $|x^2 - x_0^2| \leq 2k_0|x - x_0| < \varepsilon$

On tire de l'égalité $2k_0|x - x_0| < \varepsilon$ que $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2k_0}$.

Donc en choisissant $\alpha = \min(1; \frac{\varepsilon}{2k_0})$, on a bien l'implication souhaitée.

3.1.2 Lever une forme indéterminée

Le but est d'enlever le terme qui "perturbe notre analyse" en le factorisant puis en effectuant une simplification.

Ainsi, pour une FI $\frac{\infty}{\infty}$, on met le terme de plus haut degré en facteur.

En revanche, pour une FI $0/0$, on met en facteur $x-$ la valeur pour laquelle l'expression s'annule. Si elle s'annule 0, on met simplement x en facteur.

On oeut aussi faire par croissance comparée : l'exp l'emporte sur n'importe quelle fraction artionnelle.

3.1.3 Étudier une fonction

1. Calculer la dérivée
2. Donner le signe de la dérivée
3. Donner la tableau de variation
4. Calculer les limites et indiquer les asymptotes
5. Tracer la courbe de la fonction

3.1.4 Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en x_0

On utilise la définition de la limite avec les suites : $\lim\limits_{\infty} f = l$ si $\forall(u_n), \lim\limits_{\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{\infty} f(U_n) = l$. On montre donc qu'il y a 2 suites tendant vers la limite x_0 en ∞, mais donc la limite de f quand on les injecte est différente.

Exemple

Montrons que $\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

Posons $u_k = \frac{1}{2k\pi}$ Ici, $\lim\limits_{\infty} u_k = 0$

Posons $v_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ Ici, $\lim\limits_{\infty} v_k = 0$

Les 2 suites tendent bien vers 0, pourtant $\lim\limits_{\infty} \sin(\pi/2 + 2k\pi) = 1$ et $\lim\limits_{\infty} \sin(2k\pi) = 0$.

Les limites sont différentes, donc $\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

3.1.5 Étudier la continuité d'une fonction en un point

On donne la limite à droite et à gauche, puis la valeur atteinte par la fonction au point. Si les 3 valeurs sont égales, la fonction est continue en ce point.

3.1.6 Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

Il faut d'abord montrer qu'elle est continue en ce point !

On étudie la limite du taux d'accroissement de la fonction en ce point : $\lim\limits_{x \to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, que l'on compare avec $f'(x_0)$.

3.1.7 Créer un intervalle fermé borné à partir d'intervalles infinis pour appliquer le TVI

Si $\lim\limits_{+\infty} = +\infty$, par définition de la limite, $\forall A > 0, \exists R > 0, x > R \Rightarrow f(x) > A$. En particulier, pour $A = 1$, $\exists R > 0, x > R \Rightarrow f(x) > 1$. Donc $\exists a = 2R, f(a) > 1$

Si $\lim\limits_{-\infty} = -\infty$, par définition de la limite, $\forall A > 0, \exists R' > 0, x > R' \Rightarrow f(x) < -A$. En particulier, pour $A = 1$, $\exists R' > 0, x > R' \Rightarrow f(x) < -1$. Donc $\exists b = 2R, f(b) < -1$

On peut désormais appliquer le TVI sur l'intervalle $[a, b]$.

3.1.8 Résoudre un problème impliquant de montrer l'existence d'un intervalle

On doit montrer qu'il existe un intervalle τ durant lequel la fonction augmente de m points. On modélise la problème par une fonction continue sur un certain intervalle $[a, b]$.

Il faut alors montrer que $\exists x \in [a, b], f(x) - f(x-\tau) = m \iff f(x) - f(x-\tau) - m = 0$

On pose alors une fonction g sur l'intervalle $[a, b-\tau]$ telle que $g(x) = f(x) - f(x-\tau) - 3$

On calcule g aux bornes de son intervalle, a et $b-\tau$ pour montrer que $g(a)$ et $g(x-\tau)$ sont de signe opposé. Comme g est continue, d'après le TVI, il existe c tel que $g(c) = 0$.

3.1.9 Utiliser Rolle

- On nous parle de la dérivée
- Cette dernière doit s'annuler
- L'intervalle d'annulation de la dérivée est ouvert, donc on utilise Rolle.

Utilisation :

1. on vérifie qu'elle est continue sur $[a, b]$
2. On vérifie qu'elle est dérivable sur $]a, b[$.
3. On calcule $f(a)$ et $f(b)$
4. On conclue : Donc d'après le Théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

3.1.10 Utiliser la bijectivité pour montrer qu'il existe une unique solution telle que $f(x_0) = c$ sur un intervalle

f est continue sur l'intervalle, par exemple $\mathbb{R}$ et strictement croissante ou décroissante.

On calcule les images des limites ou bornes de l'intervalle, $[a, b]$.

Donc f réalise une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}$ dans $[a, b]$.

Or, $c \in [a, b]$

Donc $\exists! x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = c$