Chapitre

5

Combinatoire et dénombrement

5.1 Cardinalité

5.1.1 Introduction

Théorème 1.1 : Équipotence

2 ensembles E et F sont dits équipotents (écrit $E \sim F$) s'il existe une bijection φ de $E \to F$

Théorème 1.2 : Propriétés de la relation équipotence

Elle est réflexive : $\forall E, E \sim E.\ \varphi = Id_E$

Elle est symétrique : $E \sim F \Rightarrow F \sim E$ car $\varphi^{-1}F \to E$ est bijective

Emme est transitive : $\forall E, F, G$, si $E \sim F$ et $F \sim G$, alors $E \sim G$ car si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ bijectives alors $\psi \circ \varphi : E \to G$ est bijective car composée de bijections.

Conséquences

E et F ont le même cardinal $\iff E \sim F$

5.2 Ensembles finis

5.2.1 Notations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ par $0! = 1$, $1! = 1$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$

5.2.2 Définition

Théorème 2.1 : Définition

E est fini si $E = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $E \sim [\![1; n]\!]$

5.2.3 Popriétés et propositions

Lemmes fondamentaux

Lemme 2.1

Il existe une injection de $[\![1; n]\!] \to [\![n, m]\!] \iff n \leq m$

Lemme 2.2

Il existe une bijection de $[\![1; m]\!] \to [\![1, n]\!] \iff n = m$

Si $E \neq \varnothing$, alors les Lemme 5.2.3 et 5.2.3 montrent l'unicité de l'entier n tel que $E \sim [\![1; n]\!]$. On écrit alors $\operatorname{card}(E) = |E| = n$ et si $E = \varnothing, n = 0$

Rmq : Si E et F sont de cardinal finis, alors $E \sim F \Rightarrow \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$

cardinalité et surjectivité

Soient E et F 2 ensembles finis (c'est faux avec des ensembles infinis).
Soit $f : E \to F$ une application.

- Si f est injective, $Card(E) \leq \operatorname{card}(F)$
- Si f est surjective, $\operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(F)$
- Si $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$, f est bijective $\iff$ injective $\iff$ surjective

Autres propositions

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$, alors

- A est fini
- $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(E)$
- $A = E \iff \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E)$

Soit E un ensemble fini et $A_1 \to A_k$ le sous-ensemble de E tels que $A_1 \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Alors $\cup_{i=1}^{k} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card}(A_i)$

Soit $A, B \subset E : \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$

$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B)$

Lemme des bergers

Lemme 2.3 : Lemme des bergers

Principe : Si un ensemble E possède une partition en p sous-ensembles contenant chacun r éléments, alors E contient$p \times r$ éléments. Soit E un ensemble fini et F un ensemble et soit $f : E \to F$ une application.

Compter les éléments de E revient à compter les éléments de l'image réciproque de f

$\operatorname{card}(E) = \sum_{y \in F} = \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\})$

En effet, f est une application donc $\forall y \neq y' \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \varnothing$

$\forall x \in E, f(x)$ existe donc $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$. D'où $\cup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = E$

D'où $\operatorname{card}(E) = \sum \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\}))$ car $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ donc de cardinal fini et comme E est fini, $\{y \in F, \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\})) \neq 0\}$ est également fini

Principe des tiroirs

Lemme 2.4 : Principe des tiroirs

Soit E, F 2 ensembles finis tel que $card(E) \geq \operatorname{card}(F)$ alors il n'existe pas d'affectation injective de $E \to F$, i.e soit $f : E \to F$, $\exists y \in F$, tel que $f^{-1}(\{y\})$ contient 2 éléments.

5.3 Analyse combinatoire

Théorème 3.1 :

Le nombre d'applications de X vers Y, de cardinaux respectifs $n, p \geq 1$ est p^n

5.3.1 Fonction caractéristique

Théorème 3.2 : Fonction caractéristique

Soit X un ensemble et A une partie de X. Une fonction caractéristique de A est l'application χ_A de X vers $\{0, 1\}$, prenant la valeur 1 sur A et 0 sur $X \backslash A$.

La fonction prend la valeur 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$

Théorème 3.3 :

L'application $A \to \chi_A$ est une bijection de l'ensemble des parties de X vers (l'ensemble des applications de X vers $\{0, 1\}$.)

Théorème 3.4 :

L'ensemble des parties de X est fini de cardinal 2^n

Preuve 3.1

D'après le théorème précédant, comme l'application $A \to \chi_A$ est bijective, $card(P(x) =$ card(l'ensemble des applications de X vers $\{0, 1\}$.). En appliquant le théorème 5.3, en prenant $Y = \{0.1\}$ et $p = 2$, on obtient 2^n.

5.3.2 Arrangement

Un arrangement parmis n objets est une suite de p objets distincts pris parmi les n objets donnés. On note le nombre d'arangements A_n^p. Trouver A revient à trouver le nombre d'injections de $[1, p]$ dans l'ensemble des n objets.

Théorème 3.5 :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve 3.2

Prenons ici la première égalité comme définition de A_n^p. Pour tout entier p, notons $P(p)$ la propriété suivante : pour tout ensemble X de cardinal p et tout ensemble fini Y de cardinal $n \geq p$ le cardinal de l'ensemble des injections de $X \to Y$, noté $I(X, Y)$ est A_n^p.

$P(0)$ est vraie : $\forall$ ensembles Z, il y a une seule application de l'ensemble vide dans Z, et elle est injective.

Soit maintenant $p \geq 1$ un entier tel que $P(p-1)$ est vraie. Nous devons montrer qu'alors le cardinal de $I(X, Y)$ est A_n^p.

Fixons un élément a de X, et soit $X' = X \backslash \{a\}$, qui est de cardinal $p-1$.

À toute injection f de $I(X, Y)$, on peut associer bijectivement le couple (g, b) où g est la restriction de f à X' et b est $f(a)$.

On a donc : $card(I(X, Y)) = card(I(X', Y)) \times (n-p+1) = A_n^{p-1}(n-p+1) = A_n^p$

Note : $card(f(a)$ correspond à la dernière possibilité, une fois que celles de X' sont prises. C'est pourquoi son cardinal est $(n-p+1)$

Théorème 3.6 :

Le nombre de bijection d'un ensemble X vers Y de même cardinal est $A_n^n = n!$.

5.3.3 Combinaisons

On appelle combinaison de n éléments de X pris p à p toute partie de X à p éléments. On le note C_n^p. L'ordre n'a pas d'importance.

Théorème 3.7 :

> Le nombre de parties à p éléments de X est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$.

> **Preuve 3.3**
>
> Si $f : [1, p] \to X$ est une injection, $f([1, p])$ est une partie à p éléments de X, d'où une application $\psi : f \to f([1, p])$ de $I([1, p], X)$ dans $P_p(X)$.
>
> Soit B une partie à p éléments de X.
>
> $\psi^{-1}(\{B\})$ est formée des injections $f : [1, p] \to X$ ayant pour image B, i.e. des bijections de $[1, p]$ sur B. D'après le théorème précédant, la réciproque est donc de cardinal $p!$.
>
> On a alors : $A_n^p = card(I([1, p], X)) = \sum_{B \in P(X)} p! card(P(X))$ et il vient $card(P(X)) = \frac{A_n^p}{p!}$.

Propriétés

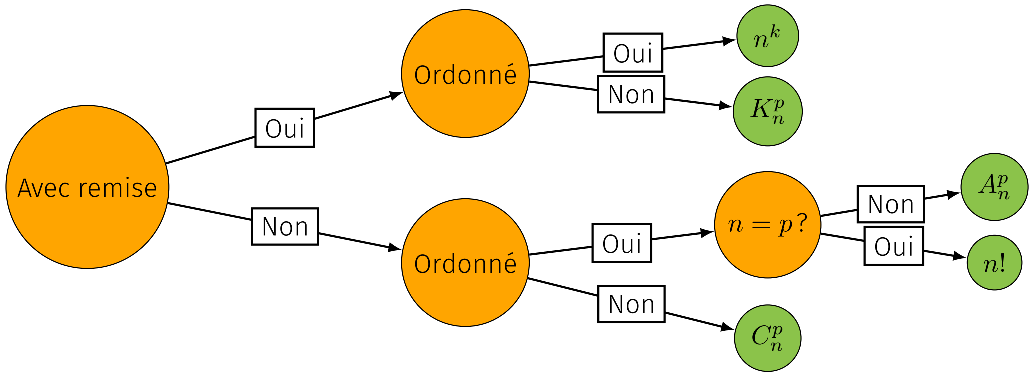
- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 0$
- $C_n^1 = n$
- Propriété de symétrie : $C_n^{n-p} = C_n^p$
- Triangle de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$
- Nombre de parties d'un ensemble : $\sum_{k=0}^{n} C_n^p = 2^n$

5.3.4 Autres propriétés

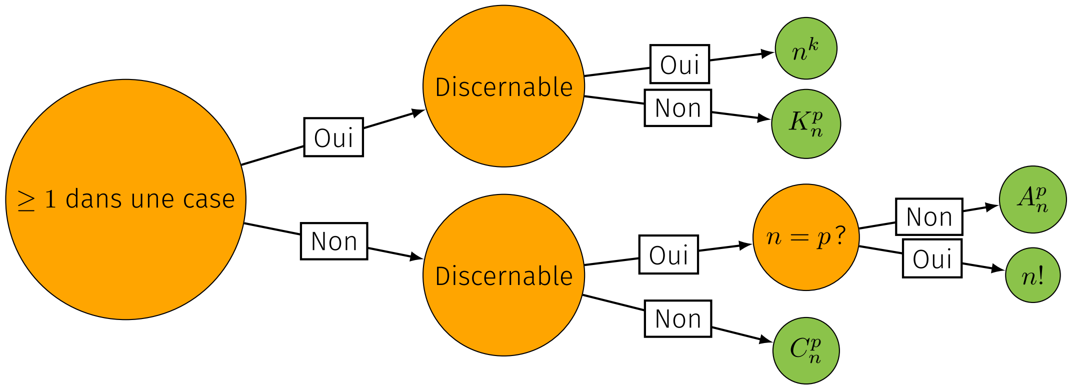
- Cardinal des parties d'un ensemble à n éléments : 2^n
- Nombre de fonction d'un ensemble à k éléments vers un ensemble à n éléments : n^k
- Nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments : $n!$. Il s'agit du nombre n-uplet de l'un des ensemble, où l'ordre des éléments comptent.

5.4 En résumé

5.4.1 Tirage



5.4.2 Rangement



Théorème 4.1 : Formules

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- $K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$