6

Chapitre

Nombres complexes

6.1 Généralités

6.1.1 Propriétés

> **Inférieur Ou supérieur**
>
> Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. On ne peut pas dire qu'un nombre complexe est plus grand qu'un autre.

Opérations usuelles

Soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

Opérations de conjugaison

- $\bar{z} = a - ib$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$
- $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z.$

6.1.2 Module d'un nombre complexe

Définitions

Le module est noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ i

Le module d'un nombre complexe est la prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue qui existe sur $\mathbb{R}$. On a $|z| = OM$. Il défini une distance sur $\mathbb{C}$

i Info

La notation $\sqrt{x}$ est réservée au Réels positifs. Or le module est une valeur réelle positive, on peut donc l'utiliser ici.

Propriétés

- Si $z = x + i\,y$ alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|z| = |\overline{z}|$, $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$, n entier naturel.

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Module négatif

$z = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas sous forme polaire. On sait que $e^{i\pi} = -1$, donc $z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$.

6.1.3 Argument

Définition

Soit M un point d'affixe le nombre complexe z non nul.
On appelle argument de z tous les réels θ, mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}\right)$.
On note $arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ (modulo $[2\pi]$).

Astuce

Autrement dit, un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments.
Si θ est l'un d'entre eux, tout autre argument de z s'écrit $\theta + 2k\pi$.
On dit aussi qu'un argument de z est défini modulo 2π.

Argument du nombre 0

Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument car la définition $arg(z) = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}\right)$ suppose $M \neq 0$.

Propriétés

- Si z est un réel strictement positif alors $arg(z) = 0 \quad [2\pi]$.
- Si z est un réel strictement négatif alors $arg(z) = \pi \quad [2\pi]$.
- Si z est un imaginaire pur non nul alors $arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
- Si $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ alors $arg(-z) = \theta + \pi \quad [2\pi]$
- Si $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ alors $arg\left(\overline{z}\right) = -\theta \quad [2\pi]$.

Règles de calcul

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

On note : $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

6.1.4 Formules d'Euler

Théorème 1.1 : Formule d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème 1.2 : Propriétés

$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

6.1.5 Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe sur $\mathbb{C}$ par $\exp : C \to C, z \to e^{a+ib}$

Elle vérifie les mêmes propriétés que dans les réels. :

- $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$
- $\exp(nz) = (\exp(z))^n$
- Elle prolonge à $\mathbb{C}$ l'exponentielle réelle. Il ne faut pas le confondre avec la forme exponentielle d'un nombre complexe.

6.2 Equations du 2nd degré

Théorème 2.1 : Solutions d'une Équation du 2nd degré à coefficients complexes

L'équation $Az^2+bz+c = 0$, notée E admet 2 solutions complexes, qui sont :

- $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, avec $\delta^2 = \Delta$

Théorème 2.2 : Théorème fondamental de l'algèbre

Toute fonction polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$.