Chapitre 6

Nombres complexes

6.1 Méthode

6.1.1 Solutions de $z^n = 1$

1. On pose $z = \rho e^{i\theta}$
2. On écrit sous forme polaire : $\rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$
3. L'égalité est vérifiée si le module des 2 nombres sont égaux, i.e. $\rho = 1$
4. Il faut aussi que $n\theta = 0 + 2k\pi$, avec $0 < k \leq n - 1$
5. Les solutions sont donc $\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}} \dots e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$

6.1.2 Résoudre $z^n = w$

1. On pose $z = \rho e^{i\theta}$
2. On écrit sous forme polaire : $\rho^n e^{in\theta} = |w|e^{i\varphi}$
3. L'égalité est vérifiée si le module des 2 nombres sont égaux, i.e. $\rho = \sqrt[n]{|w|}$
4. Il faut aussi que $\theta = \frac{\varphi}{n}$.
5. On multiplie le résultat par les racines n-eme de l'unité associées.

6.1.3 Résoudre $z^n = w^n$

On cherche z pour w donné. z a n solutions, qui sont z mutipliées par chacunes des racines n de l'unité associées.

6.1.4 Calculer les racines d'un nombre complexe

On cherche les racines z_1, z_2 d'un nombre complexe, noté w. Si $w = 0, z = 0$

1. On calcule le module de w
2. Comme $z^2 = w \Rightarrow |z|^2 = |w| \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}^2 = |w|$, on en déduit finalement que $a^2 + b^2 = |w|$
3. De plus, $z^2 = (a+ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$. On en déduit que la partie réelle de w est $a^2 - b^2$ et que la partie imaginaire est $2ab$.
4. On obtient un système à 3 équations. les 2 premières nous permettent de déterminer $\pm a$ et $\pm b$. La dernière nous donne le signe : si $2ab$ est positif, a et b sont de même signe, dans le cas contraire, ils sont de signe contraire.

En résumé, on doit résoudre ce système pour trouver les solutions :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = |w| \\ a^2 - b^2 & = Re(w) \\ 2ab & = Im(w) \end{cases}$$

6.1.5 Utiliser la formule de moivre pour exprimer des cosinus et sinus

On sait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. On souhaite exprimer $\cos(4x)$ en fonction de sinus et cosinus. On introduit pour cela le nombre complexe $e^{i4x} = (e^{ix})^4 = (\cos(x) + i\sin(x))^4$. Par identification de la partie réelle pour le $\cos$ et imaginaire pour le $\sin$, on peut trouver le résultat demandé.

On se sert du binome de Newton pour retrouver les coefficients de notre développement si il le faut

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i\sin(x))^4 &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) \\ &\quad + 6\cos^2(x)(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \\ &\quad - 4\cos(x)(i\sin^3(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) + \sin^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \\ &\quad + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) - 4\cos(x)(i\sin^3(x) \\ \cos(4x) &= \cos^4(x) + \sin^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \end{aligned}$$

6.1.6 Linéariser une expression

On utilise les formules d'Euler pour exprimer les $\cos$ et $\sin$. Ainsi, pour linéariser $\cos^n(x)\sin^m(x)$, on écrit

$$\cos^n(x)\sin^m(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^m$$

On met en facteur tout ce qui se trouve au dénominateur pour l'enlever et on calcule pour retrouver d'autres expressions que l'on pourra retransformer avec les formules d'Euler.