Chapitre 7

Polynômes et fractions rationnelles - Méthodologie

7.1 Polynôme

7.1.1 Multiplications de 2 polynômes

On calcule d'abord les coefficients : Le nombre de coefficient vaut le double du degré le plus des 2 polynômes. Pour chaque coefficient, on cherche le nombre de façon d'obtenir le degré correspondant à son indice. Finalement, on écrit le résultat avec un polynôme ayant le double du degré le plus haut initial, avec les coefficients trouvés.

> **Astuce**
> Par exemple, pour C_3, afin d'obtenir 3 avec les indices des coefficients que l'on a, on peut faire $0+3, 1+2, 2+, 3+0$. Pour obtenir C_5, on ne peut faire que $3 + 2$ ou $2 + 3$. On ne peut pas faire $4 + 1$ En effet, il n'y pas de coefficient 4 dans nos polynômes.

Exemple : $P = 3 + 4X + 0X^2 + 12X^3$ et $Q = 1 + X + X^2 + 0X^3$. On a $P + Q = 4 + 5X + X^2 + 12X^3$, $\sqrt{2}Q = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + \sqrt{2}X^2$.

> **Info**
> Pour plus de facilité dans le repérage des coefficients, on peut rajouter des coefficients, on peut en rajouter des nuls pour les degrés nul dans les polynômes. C'est pourquoi on a rajouté en rouge $0X^3$ et $0X^2$.

$$C_0 = a_0b_0 = 3 \times 1$$
$$C_1 = a_1b_0 + a_0b_1 = 3 \times 1 + 4 \times 1$$
$$C_2 = a_1b_1 + a_0b_2 + a_2b_0$$
$$C_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$$
$$C_4 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$$
$$C_5 = a_2b_3 + a_3b_2$$
$$C_6 = a_3b_3$$

On écrit $PQ = C_0 + C_1X + C_2X^2 + C_3X^3 + C_4X^4 + C_5X^5 + C_6X^6$.

7.1.2 Déterminer la multiplicité d'une racine

On sait que x_0 est racine de P. Pour détmerminer la multiplicité de la racine, c'est à dire trouver pour quel α, la racine ne divise plus la dérivée αieme du Polynôme.

Exemple : On veut déterminer la multiplicité de la racine -1 du polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1$. Après avoir vérifié que -1 est bien racine, on calcule la dérivée première : $P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2$. En injectant -1 dans cette dernière, on retrouve 0. On calcule ensuite la dérivée seconde : $P''(X) = 12X^2 + 12X + 4$. Ici, $P''(-1) = 4 \neq 0$. Donc $\alpha = 2$ et la multiciplité de -1 comme racine est 2.

7.1.3 Décomposer un polynôme en facteurs irréductibles

On cherche des racines pour écrire le polynôme $P(X)$ sous la forme $(X - x_0)(X - x_1)(X - x_n) \dots$.

Pour ce faire, on peut commencer par chercher une racine évidente.

Une fois une racine trouvée, on peut évaluer sa multiplicité, puis diviser le polynôme par $(X - x_0)^\alpha$ pour trouver un autre polynôme au quotient, sur lequel on va recommencer à cherche des racines, et ce jusqu'à ce que l'on écrit le polynôme en polynômes irréductibles.

Quelques astuces pour trouver les racines :

- Si on a un polynôme de la forme $X^n - 1$, il s'agit des racines n ièmes de l'unité.
- Si on connaît les racines d'un polynôme $Q(X)$ divisant $P(X)$, alors $P(X)$ a aussi les racines de Q avec au moins la même multiplicité.
- Si une racine d'un polynôme est un nombre complexe, une autre racine est son conjugué.

7.2 Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

7.2.1 Méthode générale

Travail sur le dénominateur

On factorise le dénominateur en produit d'éléments irréductibles à coefficients complexes.

Décomposition théorique

On donne la décomposition de la forme $P(X) = E(X) + \frac{a}{X - x_1} + \frac{b}{X - x_2} + \frac{c}{X - x_3} + \dots$

Dans le cas de racines multiples, il y a d'autres éléments à rajouter dans la décomposition théorique. Si elle est d'ordre 2, il faut rajouter $\frac{a_2}{(X-x_1)^2}$, si elle est d'ordre 3 : $\frac{a_2}{(X-x_1)^2}$ et $\frac{a_3}{(X-x_1)^3}$

Calcul de E

On fait la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. $E(X)$ vaut le quotient trouvé.

> **Astuce**
> Si le degré du dénominateur est plus élevé que le numérateur, le quotient de la division est nul et $E(X) = 0$!

Calcul des coefficients

On utilise la méthode dit "du cache". On multiplie F par chacun des éléments irréductibles du dénominateur puis on injecte la racine dudit élément pour déterminer le coefficient. On réitère pour chacun des éléments irréductibles.

7.2.2 Passer d'une décomposition complexe en décomposition réelle

On a une décomposition de la forme : $P(X) = E(X) + \frac{a}{X-x_1} + \frac{b}{X-x_2} + \frac{c}{X-z_1} + \frac{d}{X-z_2}$, avec $z_1, z_2, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite avoir une décompositionn réelle, c'est à dire avec $c, d \in \mathbb{R}$.

On met $\frac{c}{X-z_1}$ et $\frac{d}{x-z_2}$ sous le même dénominateur pour obtenir $\frac{c(x-z_2)}{(X-z_1)(X-z_2)}$ et $\frac{d(x-z_1)}{(X-z_1)(x-z_2)}$. À ce stade, il nous reste 2 éléments simples réels avec le même dénominateur, qu'il ne nous reste plus qu'à sommer.

> **Exemple 1**
>
> Décomposons $P(X) = \frac{1}{1-X^4}$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
>
> On travaille d'abord le dénominateur pour le transformer en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$:
>
> $$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{1^2 - (X^2)^2} = \frac{1}{(1-X^2)(1+X^2)} \\ &= \frac{1}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} \end{aligned}$$
>
> La décomposition théorique s'écrit alors :
>
> $$P(X) = E(X) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$
>
> Le degré du numérateur étant plus faible que celui du dénominateur, $E(X) = 0$. On applique la méthode du cache pour

trouver les coefficients :

$$((X-1)P(X))_{X=1} = \frac{1}{(1+1)(1-i)(1+i)} = a = \frac{1}{4}$$
$$((X+1)P(X))_{X=-1} = \frac{1}{(1+1)(1-i)(1+i)} = b = \frac{1}{4}$$
$$((X+i)P(X))_{X=-i} = \frac{1}{(-i-i)(1-i)(1+i)} = c = \frac{-1}{4i} = \frac{i}{4}$$
$$((X-i)P(X))_{X=i} = \frac{1}{(i+i)(1-i)(1+i)} = c = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$$

Avec les coefficients, nous pouvons écrire la décomposition dans $\mathbb{C}$:

$$P(X) = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{i}{4(X-i)} + \frac{-i}{4(X+i)}$$

On transforme les fractions complexes en fractions réelles en les mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{4(X-i)} + \frac{-i}{4(X+i)} \\
&= \frac{i(X+i)}{4(X-i)(X+i)} + \frac{-i(X-i)}{4(X+i)(X-i)} \\
&= \frac{iX+1}{4(X^2+1)} + \frac{-iX+1}{4(X^2+1)} \\
&= \frac{2}{4(X^2+1)} = \frac{1}{2(X^2+1)}
\end{aligned}$$

Finalement, la décomposition dans $\mathbb{R}$ est :

$$P(X) = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{2(X^2+1)}$$

7.2.3 Méthode de la dérivée

Cette méthode est utile pour trouver les coefficients dans le cas de pôles multiples. Une fois le coefficient associé à la puissance la plus haute du pôle, on dérive successivement pour trouver les autres coefficients associés au puissances plus basses.

Exemple 2

On décompose $P(X) = \frac{X^2}{(X+2)^4}$. Il n'y a qu'un pôle mais de multiplicité 4.

On sait que $E(X) = 0$. La décomposition théorique s'écrit donc :

$$P(X) = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} + \frac{c}{(X+2)^3} + \frac{d}{(X+2)^4}$$

En appliquant la méthode du cache avec $(X+2)^4P(X)$, on trouve

$$(X+2)^4P(X) = a(X+2)^3 + b(X+2)^2 + c(X+2) + d$$

De cette égalité, avec $X = -2$, on trouve $d = 4$.

On va maintenant dériver cette égalité.

On va dériver $(X+2)^4P(X)$ une première fois pour déterminer c. Il nous faut donc dériver $(X+2)^4P(X) = (X+2)^4 \times \frac{X^2}{(X+2)^4} = X^2$. On obtient $2X$. On dérive maintenant le membre de droite pour obtenir $a \times 3(X+2)^2 + b \times 2(X+2) + C$. Finalement, on obtient une nouvelle égalité :

$$2X = a \times 3(X+2)^2 + b \times 2(X+2) + c$$

Avec $X = -2$, on trouve $c = -4$

Pour trouver b, on dérive cette égalité pour trouver :

$$2 = a \times 6(X+2) + b \times 2$$

On en déduit, avec $X = -2$ que $b = 1$.

Pour trouver a, on dérive cette égalité pour trouver :

$$0 = 6a$$

D'où l'on tire $a = 6$

Une alternative si la multiplicité est basse (2 par exemple) est d'évaluer $P(X)$ en des points autres que les pôles pour trouver des relations entre les coefficients.

7.3 Calculs sur les polynômes

7.3.1 Déterminer si un polynôme en divise un autre

On cherche à déterminer si le polynôme Q divise le polynôme P. On cherche d'abord les racines de Q. Si Q divise P, alors les racines de Q sont aussi les racines de P. On remplace donc dans X par une racine et on vérifie si le résultat est nul.

7.3.2 Trouver un polynôme respectant certaines conditions

On cherche un polynôme de degré inférieur à n passant par $n+1$ points. Pour cela, on détermine d'abord les polynomes de Lagrange associés aux points. On somme ensuite les polynomes multipliés par un coeff-cient selon la valeur que doit prendre le polynome au point étudié.

Exemple : On cherche un polynôme de degré 3 tel que $P(1) = 3, P(-1) = 2, P(2) = -1$. On calcule d'abord les polynômes de Lagrange en chacun des points :

- $L_1 = \dfrac{(X-(-1))(X-2)}{(1--1)(1-2)}$
- $L_2 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(-1-1)(-1-2)}$
- $L_3 = \dfrac{(X-1)(X-(-1))}{(2-1)(2-(-1))}$

> **Astuce**
> On met au numérateur les valeurs pour lesquelles le polynôme est contraint, autre que la valeur pour laquelle on calcule le polynôme.
> Au dénominateur, on soustrait à la valeur pour laquelle on calcule le polynome de Lagrange les autres valeurs en lesquelles le polynome est contraint

On somme les polynômes de Lagrange pour trouver le polynôme final sans oublier les coefficients ! On obtient :

$$P(X) = 3L_1 + 2L_2 - 1L_3$$

> **Astuce**
> Par exemple, pour L_1, son coefficient sera 3, car la valeur pour laquelle on l'a calculé est 1, et on veut que $P(1) = 3$.