Chapitre 4

Intégrales

4.1 Primitives

4.1.1 Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fontion définie sur $[a, b]$ et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. F est une primitive de f si F est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$, i.e $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$.

4.1.2 Propriétés

Existence des primitives

Il n'existe pas forcément une primitive aux fonctions.

Si F et G sont 2 primitives de f sur $[a, b]$, alors $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], F(x) = G(x) + k$, i.e f et g diffèrent d'une constante

4.2 Techniques

4.2.1 Intégration par parties

Soient u, v 2 fonctions C^1 (continues de dérivée continues) sur $[a, b]$. Alors

Classe C^n
f est C^n sur $[a, b]$ si f est n fois dérivables sur $[a, b]$ et f^n est continue sur $[a, b]$. C^∞ si $\forall n \in \mathbb{N}, f^n$ existe.

Théorème 2.1 : Formule

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

4.2.2 Changement de variable dans une intégrale

Théorème 2.2 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable

Soit $\varphi[\alpha,\beta] \to [a,b]$ une application bijective et C^1. On note φ^{-1} l'application réciproque

Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$.

4.2.3 Méthode

Vérifications à faire

Avant d'intégrer, il faut toujours vérifier que la fonction est intégrable, c'est à dire qu'elle est monotone ou continue sur $[a,b]$.

Première méthode

Il faut que la fonction u choisie soit bijective pour appliquer cette méthode !

1. On pose $t = \varphi(u)$
2. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$
3. Valeurs aux bornes $t = a \Rightarrow u = \varphi^{-1}(a)$ et $t = b \Rightarrow u = \varphi^{-1}(b)$

Variante

Variante dans le calcul de primitive. On n'exige pas le fait que cela soit bijectif

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \int f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

On pose $t = \varphi(u)$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$

Si $F = \int f$ et f continue sur $[a, b]$, $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$

4.2.4 En pratique

Exemple 1

Calculons :

$$\int_0^1 \sqrt{e^x - 1}$$

On va effectuer un changement de variable pour tenter d'enlever la racine.

On pose donc $u = \sqrt{e^x - 1}$. Calculons maintenant $\mathrm{d}u$ pour en déduire $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \frac{e^x-1+1}{2u}\mathrm{d}x = \frac{u^2+1}{2u}\mathrm{d}x$. Finalement, on obtient $\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u$

Astuce
Le but est de simplifier l'expression au maximum et l'exprimer le plus possible en fonction de u.

Remarque

Comme la fonction u est bijective, on aurait aussi pu calculer sa réciproque pour obtenir une nouvelle expression de x : $u = \sqrt{e^x - 1} \iff u^2 = e^x - 1 \iff u^2 + 1 = e^x \iff x = \ln(u^2 + 1)$. On peut ensuite exprimer directement $\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u$

On applique maintenant la fonction u aux bornes de l'intégrale : On obtient $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0, x = \ln(2) \Rightarrow u(\ln(2)) = 1$.

Difficulté
et non sa réciproque !

On peut maintenant reécrire l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 u \times \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 \frac{u^2-1+1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 1 - \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2[u - \tan^{-1}(u)]_0^1 \\
&= 2 - \frac{2\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exemple 2

Calculons :

$$\int \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$$

On pose $u = \sin(x)$. Calculons maintenant $\mathrm{d}u$ pour en déduire $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}$.

> **Remarque**
>
> Comme la fonction u n'est pas bijective, on ne peut pas écrire de manière équivalente que $x = \arcsin(u)$

On peut maintenant reécrire l'intégrale :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x \\
&= \int u^5 \cos(x)^3 \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)} \\
&= \int u^5 \cos(x)^2 \mathrm{d}u \\
&= \int u^5(1-\sin(x)^2)\mathrm{d}u \\
&= \int u^5(1-u^2)\mathrm{d}u \\
&= \int u^5 - u^7 \mathrm{d}u \\
&= [\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}] = [\frac{\sin(x)^6}{6} - \frac{\sin(x)^8}{8}]
\end{aligned}$$

4.2.5 Formulaire

Fonction	Primitive
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ si $n \neq -1$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$\frac{a}{x}$	$a\ln x + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
e^x	$e^x + k$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$

Fonction	Primitive
$u' \cos u$	$\sin u + k$
$u' \sin u$	$-\cos u + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}(u)^{3/2} + k$
$u'e^u$	e^u
$u' \cosh u$	$\sinh u$
$u' \sinh u$	$\cosh u$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}$

4.3 Propriétés

4.3.1 Propriétés

Soient φ, ψ 2 fonction en escalier

- $\int$ est linéaire : $\int_b^a \varphi + \lambda\psi(t)\mathrm{d}t = \int_b^a \mathrm{d}t + \lambda \int_b^a \psi(t)\mathrm{d}t$
- $\in_b^a$ est croissante sur les fonctions. Donc si $\varphi \geq 0$, alors $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t \geq 0$ et si $\varphi \leq \psi, \int \varphi \leq \int \psi$
- Inégalité triangulaire : $|\int_b^a \varphi(t)| \leq \int_b^a |\varphi(t)|$
- Relation de Chasle : $\int_x^y \varphi + \int_y^z = \int_x^z \varphi : \int_x^x \varphi = 0$ et $\int_y^x \varphi = -\int_x^y \varphi$.

4.3.2 Intégrale d'une fonction définie sur [a,b] et bornée sur [a,b]

Théorème 3.1 : Définition

Une fonction f est intégrable sur $[a, b]$ s'il existe $\forall \varepsilon > 0$ 2 fonctions en escalier φ, ψ, telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi(t) - \varphi(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$

Dans ce cas, on peut définir le plus grand des minorants et le plus petit des majorants, qui sont égaux : $\int_a^b \varphi = \int_a^b \psi$.

4.3.3 Autres

Théorème 3.2 : Proposition

L'intégrale des fonctions intégrables sur [a,b] présente les mêmes propriétés que l'intégrale des fonctions en escalier, c'est à dire linéarité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasle.

4.3.4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 3.3 : Théorème

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \to \int_a^x f(t_{\mathrm{d}}t$ est une primitive de f. Donc F

> est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$. De plus, si G est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$.