Chapitre 1

Repérage

1.1 Repérage

1.1.1 introduction

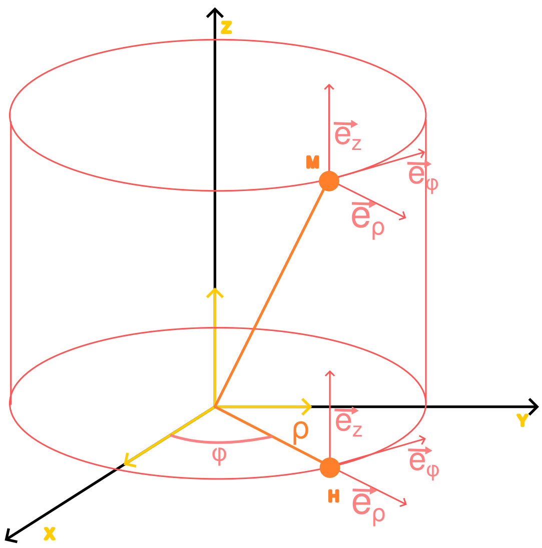
On utilise un repère définit par

- une origine
- 3 vecteurs unitaires formant une base orthonormé directe (le produit vectoriel des 2 premiers vaut le 3e vecteur)

1.1.2 Système cylindrique local

3 vecteurs unitaires :

- $\overrightarrow{e_\rho}$ appelé vecteur radial
- $\overrightarrow{e_\varphi}$ appelé vecteur orthoradial
- $\overrightarrow{e_z}$



Coordonnées cartésiennes en fonction des cylindriques

- $x = \rho\cos(\varphi)$
- $y = \rho\sin(\varphi)$
- $z = z$

Coordonnées cylindriques en fonction des cartésiennes

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \sin^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

Relation entre les vecteurs

- $\overrightarrow{e_\rho} = \cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_y}$
- $\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y}$

> **Théorème 1.1 :** Vecteur position en coordonnées cylindriques
>
> $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

1.1.3 Système sphérique

Vecteurs :

- $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$
- $\overrightarrow{e_\theta}$
- $\overrightarrow{e_\varphi}$

Lien avec les coordonnées cylindriques

Dans les 2 cas, φ ne change pas.

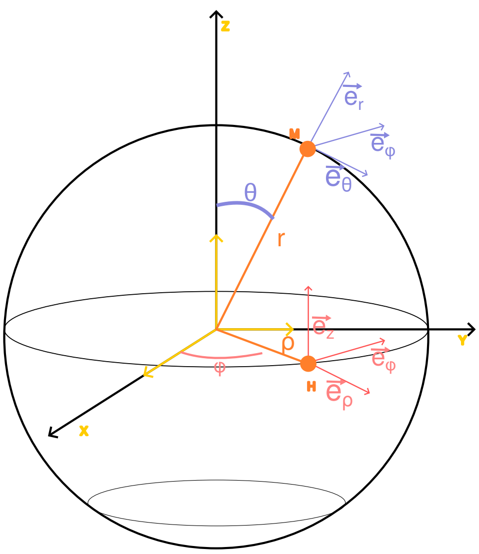
- $\rho = r\sin\theta$
- $z = r\cos\theta$

Coordonnées sphériques → cartésiennes

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\theta = \cos^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$
- $\varphi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

Coordonnées cartésiennes → sphérique

- $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$
- $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$
- $z = r\cos(\theta)$



Relation entre les vecteurs

Base cylindrique :

- $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_\varphi}$
- $\overrightarrow{e_r} = \sin(\theta)\overrightarrow{e_\rho} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{e_\theta} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_\rho} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_z}$

Base cartésienne :

- $\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y}$
- $\overrightarrow{e_r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{e_y} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{e_\theta} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{e_y} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_z}$

1.2 Cinématique en coordonnées cylindriques

On considère le temps comme absolu et universel dans tout l'espace. Le temps ne dépend pas de la position. On reste dans la cadre de la physique classique.

On utilise la vitesse instantannée $\overrightarrow{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM}$

1.2.1 Vecteur position

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

1.2.2 Vecteur vitesse

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\\ &= \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho})\\ &= \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= -\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\overrightarrow{e_y}\\ &= \frac{d\varphi}{dt}(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= \dot{\varphi}(\overrightarrow{e_\varphi})\end{aligned}$$

Théorème 2.1 : Vitesse en coordonnées polaire

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z}$$

1.2.3 Vecteur accélération en polaire

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin(\varphi)\vec{e_x} + \cos(\varphi)\vec{e_y}) \\
&= -\cos(\varphi) \times \frac{d\varphi}{dt}\vec{e_x} - \sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_y} \\
&= -\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}) \\
&= -\dot{\varphi}\vec{e_\rho}
\end{aligned}$$

On dérive $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) \\
&= \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} \\
&= \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}(\vec{e_\varphi}) + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi})\vec{e_\rho} \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}
\end{aligned}$$

π **Théorème 2.2 :** accélération en coordonnées cylindriques

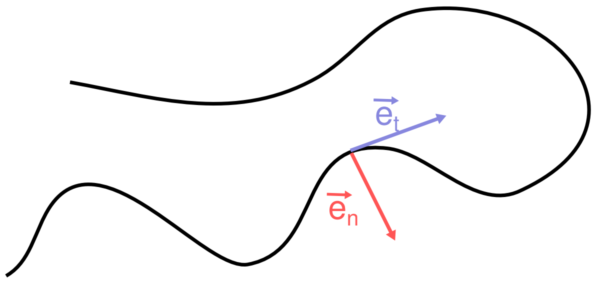
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

1.3 Cinématique en coordonnées sphériques

vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$

vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$.

1.4 Dynamique en base de Frenet



Base de l'espace en 2D. On introduit :

- $\vec{e_t}$, unitaire et tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement : $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$
- $\vec{e_n}$, orthogonal à $\vec{e_t}$. Il est dirigé vers l'intérieur de la concavité.
- On peut ajouter un troisème vecteur $\vec{e_b}$ tel que les 3 forment une BOND

Vecteur vitesse : $\vec{v} = v\vec{e_t}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{S}\vec{e_t} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}t} = \ddot{S}\vec{e_t} + \frac{v^2}{R}\vec{e_n}$, avec R le rayon de courbure.

> **Remarque**
>
> Pour un mouvement circulaire, dans la base polaire et de frenet, le vecteur $\vec{e_r}$ est opposé à $\vec{e_\rho}$.