Chapitre 3

Moment cinétique

3.1 Définition du moment cinétique d'un point matériel

3.1.1 Moment cinétique par rapport à un point

Soit un point O du référentiel R dans lequel on travaille. Soit un point matériel M de masse m, de vitesse)$\vec{v}(M)$ et de quantité de mouvement $\vec{p}(M)$ par rapport au référentiel R. Le moment cinétique de M par rapport à O dans le référentiel R est défini par le vecteur :

> **Astuce**
> Le fait que le mouvement d'un point matériel soit déterminé par la donnée d'un seul vecteur implique qu'en mécanique du point, il n'est pas nécessaire d'utiliser en même temps quantité de mouvement et moment cinétique. Le problème posé sera résolu par la détermination de l'une ou de l'autre de ces quantités. Là réside une différence essentielle avec la mécanique des solides où la détermination des deux quantités que sont le moment cinétique et la quantité de mouvement sera nécessaire.

Définition 1.1 : Moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

3.1.2 Propriétés

- $\overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{L_O} = 0$
- $\overrightarrow{OM}, \vec{p}$ colinéaires $\Rightarrow \overrightarrow{L_O} = 0$
- $\overrightarrow{L'_O} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{L_O}$: Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le détermine.
- $\overrightarrow{O'O} // \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L'_O}$
- $||\overrightarrow{L_O}|| = d \cdot p$ avec d le bras de levier
- $\overrightarrow{L_{tot}} = \sum \overrightarrow{L_i}$

3.1.3 Moment cinétique par rapport à un axe

Soit un axe Δ. On note O un point de cet axe et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire directeur de cet axe

On définit un moment cinétique L_Δ par rapport à l'axe Δ passant par O à l'aide de la relation ! :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L_O} \cdot \overrightarrow{u}$$

! Attention
Il est important de noter qu'un moment par rapport à un point est un vecteur tandis qu'un moment par rapport à un axe est un scalaire.

3.2 Moment d'une force

Définition 2.1

On appelle moment de la force f par rapport à un point O le vecteur :

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}$$

avec M le point matériel sur lequel s'applique la force.

Influence du point

Le moment des forces dépend du point où on le calcule et on a :

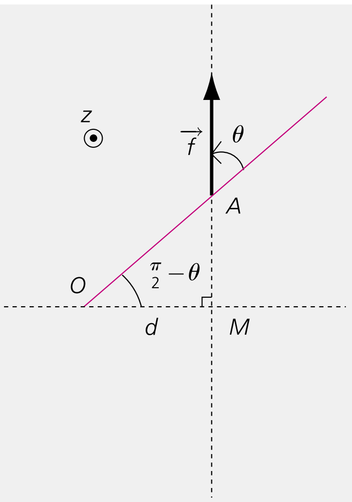
$$\overrightarrow{M_{O}'}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{f}$$

Considérations pratiques

On a, pour une force appliquée au point A

$$||\overrightarrow{M_O}|| = d||\overrightarrow{f}||$$

avec d comme sur le schéma :



3.3 Théorème du moment cinétique

Théorème 3.1 : Théorème du moment cinétique

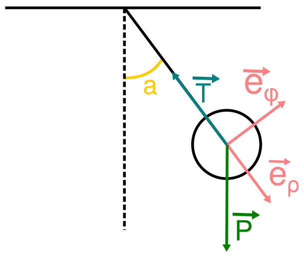
La dérivée du moment cinétique du point M en un point fixe O par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées en M par rapport au point fixe O.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{M_o}(\vec{f_i})$$

On n'appliquera le théorème du moment cinétique qu'en un point fixe O.

Composante	Linéaire	Angulaire
Mouvement	$\vec{p}$	$\vec{L}$
Vitesse	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
Position	$\vec{x}$	φ
Force	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	$\overrightarrow{M_O} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
E_c	$\frac{mv^2}{2}$	$\frac{I\omega^2}{2}$

3.4 Exemple du pendule



On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple c'est-à-dire au mouvement d'une masse ponctuelle m suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur l dont l'autre extrémité est fixe. À l'instant initial, le pendule est lâché sans vitesse

d'une position définie par l'angle θ_0 entre la verticale descendante et la direction du pendule.

Bilan des forces :

- Poids $m\overrightarrow{g}$
- Tension du fil $\overrightarrow{R}$

3.4.1 Avec le moment cinétique

Avant d'appliquer le théorème du moment cinétique, on remarque que le mouvement est plan. On se place en coordonnées polaires

On calcule L_O en coordonnées cylindriques ×

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = ml^2\dot{\theta}$$

× **Difficulté**
On applique la même formule que pour les coordonnées cartésiennes car nous sommes toujours dans une BOND

On sait aussi

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_O}(m\overrightarrow{g}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R})$$

Finalement,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(ml^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

Mais la tension est une force centrale, donc son moment de force est nul.

De plus,

$$\overrightarrow{M_O}(m\overrightarrow{g}) = -mgl\sin(\theta)\overrightarrow{e_z}$$

En assemblant les résultats, on a

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin(\theta)$$

qui donne une équation d'oscillateur harmonique en se rapprochant du point où $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$