Chapitre 4

Systèmes à plusieurs corps

4.1 Éléments cinétiques du système

4.1.1 Rappels

Conservation de l'impulsion

Dans un système fermé, l'impulsion totale du système est conservée.

Définition 1.1 : Système élastique

C'est un système où l'impulsion et l'énergie mécanique totale est conservée.

4.1.2 Centre de masse

On appelle centre de masse C, ou centre d'inertie, d'un système S de plusieurs points matériels le barycentre des points A, qui le constituent, affectés de leurs masses respectives m_i.

Exemple

Le centre de masse se rapproche du point le plus lourd

Proposition 1.1 : Caractérisation du centre de masse

$$\sum_i m_i C A_i = 0$$

Théorème 1.1 : Centre de masse

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_i m_i OA_i}{M_{total}}$$

4.1.3 Quantité de mouvement

Par rapport à un référentiel R, la quantité de mouvement totale du système S est la somme vectorielle des quantités de mouvement de chacun de ses points A :

Théorème 1.2 : Quantité de mouvement

$$\overrightarrow{P} = \sum \overrightarrow{p}_i = \sum m_i \overrightarrow{v}_i$$

Proposition 1.2 : Quantité de mouvement du centre de masse

$$\overrightarrow{P} = M_{total} \overrightarrow{V}_C$$

Forces internes

Proposition 1.3 : Qt de mouvement dans un système isolé

Les forces internes se compensent et il n'y a pas de forces externes, donc la quatité de mouvement reste constante

4.1.4 Référentiel du centre de masse

Nouveau référentiel

On intoduit le nouveau référentiel R* dont C, le centre de masse est l'origine

Quantité de mouvement dans le référentiel du centre de masse

On a :

$$\overrightarrow{P*} = M\overrightarrow{v*_c} = \overrightarrow{0}$$

4.1.5 Moment cinétique

Référentiel normal

Par rapport au référentiel R, le moment cinétique total de S, au point O, est la somme vectorielle des moments cinétiques des points A qui le constituent :

Théorème 1.3 : Moiment cinétique total

$$\overrightarrow{L_O} = \sum \overrightarrow{L_{O,i}} = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{p_i}$$

Proposition 1.4 : Transport du mouvement

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_C} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{P}$$

Référentiel R*

Écrivons, par rapport à R*, la relation entre le moment cinétique en un point quelconque Q et le moment cinétique au centre de masse. Il vient, d'après ce qui précède : $\overrightarrow{L*_Q} = \overrightarrow{L*C} + \overrightarrow{QC} \wedge \overrightarrow{P*}$. Or, comme dans ce référentiel, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$, on obtient :

$$\overrightarrow{L*_Q} = \overrightarrow{L*_C} = \overrightarrow{L*}$$

4.2 Théorèmes de Koening

Théorème 2.1 : Théorème de Koeing du moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L*} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{P}$$

On appelle $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{P}$ le moment cinétique orbital et $\overrightarrow{L*}$ le moment cinétique intrinsèque.

Théorème 2.2 : Théorème de Koeing de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique dans R est l'énergie cinétique dans R* augmentée de l'énergie cinétique du centre de masse dotée de la masse totale :

$$E_k = E_k * + 0.5MV_C^2$$

avec E_k* l'énergie cinétique interne et $0.5MV_C^2$ l'énergie cinétique externe.

4.3 Théorème du moment cinétique

Théorème 3.1 : Théorème du moment cinétique

Par rapport à un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des seuls moments des forces extérieures qui s'exercent sur le système. Les forces internes se compensent.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_{O,ex}}$$