Chapitre 5

Systèmes à deux corps

On s'interresse ici au mouvement à l'intérieur du système et non au mouvement global.

5.1 Masse réduite

5.1.1 Impulsion d'une particule

$$\overrightarrow{P_1^*} = m_1\overrightarrow{V_1^*} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V_2})$$

avec la masse réduite, noté μ et la vitesse relative, notée $\overrightarrow{\hat{V}}$.

Exemple

Contrairement au centre de masse, la masse réduite tend vers la masse de l'objet le plus léger.

Vitesse relative

Elle ne dépend pas du référentiel utilisé. On peut donc écrire

$$\overrightarrow{\hat{V}} = \overrightarrow{V_1^*} - \overrightarrow{V_2^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CM_1}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CM_2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_2M_1}}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{P_1^*} = \mu\overrightarrow{\hat{V}}$$

avec une masse fictive μ et un vecteur position $\overrightarrow{M_2M_1}$.

Astuce

On n' a pas besoin de traiter le cas de la deuxième particule car on a $\overrightarrow{P_2^*} = -\overrightarrow{P_1^*}$

Théorème 1.1 : PFD pour la particule fictive du centre de masse

$$\sum \overrightarrow{F} = \mu \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\hat{V}}}{\mathrm{d}t}$$

5.2 Force centrale

Définition 2.1 : Force centrale

$$\overrightarrow{F} = ||\overrightarrow{F}|| \times \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{||\overrightarrow{M_2 M_1}||} = ||\overrightarrow{F}|| \cdot \overrightarrow{e_n} := f(\overrightarrow{n})$$

Nouvelle grandeur

On pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur position de μ

Si la force est conservative,

$f(\overrightarrow{n}) = -\nabla U$

5.2.1 Étude du mouvement dans R*

$$\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{CM_1} \wedge \overrightarrow{P_1^*} + \overrightarrow{CM_2} \wedge \overrightarrow{P_2^*} = \overrightarrow{n} \wedge \mu \overrightarrow{\hat{V}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L^*}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_c(f(\overrightarrow{n}))} = \overrightarrow{n} \wedge f(n) \cdot \overrightarrow{e_n} = 0$$

On en déduit que la mouvement est contenu dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{L^*}$ et centré en C, donc $\overrightarrow{L^*} = L^* \overrightarrow{e_z}$!

! **Attention**
On passe d'un problème à 3 dimensions à un problème à 2 dimensions

5.2.2 Passage en coordonnées polaires

On a $\rho = n$ × ; $f(\overrightarrow{n}) = f(\rho) \cdot \overrightarrow{e_\rho}$

× **Difficulté**
On rappelle que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1 M_2}$

On a aussi $\overrightarrow{L^*} = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \overrightarrow{e_z}$ qui est constant.

On a aussi $E_m = \frac{\mu \hat{v}^2}{2} + U(\rho) = \frac{\mu \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\mu \rho^2 \dot{\varphi}^2}{2} + U(\rho) = \frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^{*2}}{2\mu\rho^2} + U(\rho)$ avec les 2 derniers termes qui sont l'énergie potentielle effective, la somme de l'énergie ponetielle et de l'effet centrifuge.

5.3 Problème de Kepler

Soit $\overrightarrow{f(\rho)} = -\frac{K}{\rho}\overrightarrow{e_\rho}$

Théorème 3.1 : Énergie mécaninque du problème de Kepler

$$E_m = \frac{\mu\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^{*2}}{2\mu\rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

avec l'énergie potentielle effective

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{L*}{\mu\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}$$

On obtient en réecrivant $\dot{\rho}$,

$$\frac{L^{*2}}{2\mu\rho^4}(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi})^2 + \frac{L^{*2}}{2\mu\rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

En posant $S := \frac{1}{\rho}$, on a

> **Exemple**
> On passe d'un problème à une dimension

$$E_m = \frac{L^{*2}}{2\mu}((\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi}) + S^2) - kS = cst$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{L^{*2}}{2\mu} \cdot 2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{L^{*2}}{2\mu}2S\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} - K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

ou encore en posant $C = \frac{\mu K}{L^{*2}}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\varphi^2} + (S - C)$$

dont la solution est

$$S(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0) + C$$

On en déduit que

Théorème 3.2 : Solution du problème de Kepler

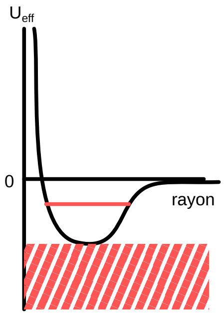
$$\rho(\varphi) = \frac{L*^2/\mu k}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

avec $e = \dfrac{AL*^2}{\mu k}$ l'excentricité du conique.

5.4 Étude du mouvement

On étudie l'énergie mécanique pour en déduire la forme de la trajectoire :

$$E_m = -\frac{k^2\mu}{2L*^2}(1-e^2)$$



5.4.1 Énergie mécanique négative

On a alors $e < 1$.

On a $l_1 = \frac{L*^2}{\mu k(1+e)}$ et $l_2 = \frac{L*^2}{\mu k(1-e)}$

5.4.2 Nul

On a alors $e = 1$ et on obeserve une parabole

5.4.3 Négatif

Si $\cos(\varphi - \varphi_0) < -\frac{1}{e}$, on a $\rho < 0$, ce qui est impossible. On a alors une zone interdite $\varphi \in [\varphi_0 + \pi - \varphi_{min}, \varphi_0 + \pi + \varphi_{min}]$ avec $\varphi_{min} = \arccos(\frac{1}{e})$.