Chapitre

6

Référentiels non galiléens

Soit R_1 galiléen et R_2 le référentiel quelconque

6.1 Rappels

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T le temps mis pour faire un tour.
- $v = R_c \times \omega$ dans un mouvement circulaire.
- Dans un mouvement circulaire, l'angle parcouru vaut $\varphi = \omega \times t$

6.2 Passage d'un référentiel à un autre

Théorème 2.1 : Égalité du vecteur position

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_1} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1O_2}}{\mathrm{d}t}_{R1} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}_{R1} \\
&= \overrightarrow{V_0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2\overrightarrow{e_{x2}} + y_2\overrightarrow{e_{y2}} + z_2\overrightarrow{e_{z2}}) \\
&= \overrightarrow{V_0} + (\dot{x}_2\overrightarrow{e_{x2}} + \dot{y}_2\overrightarrow{e_{y2}} + \dot{z}_2\overrightarrow{e_{z2}}) + (x_2\overrightarrow{\dot{e}_{x2}} + y_2\overrightarrow{\dot{e}_{y2}} + z_2\overrightarrow{\dot{e}_{z2}}) \\
&= \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_2}
\end{aligned}$$

Théorème 2.2 : Égalité du vecteur vitesse

$$\vec{v_1} = \vec{v_e} + \vec{v_2}$$

avec $\vec{v_e} = \vec{v_0} + (x_2\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} + y_2\dot{\overrightarrow{e_{y2}}} + z_2\dot{\overrightarrow{e_{z2}}})$ et $\vec{v_2} = \dot{x}_2\overrightarrow{e_{x2}} + \dot{y}_2\overrightarrow{e_{y2}} + \dot{z}_2\overrightarrow{e_{z2}}$

$$\vec{a_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{V_0}) + (\ddot{x}_2\overrightarrow{e_{x2}} + \ddot{y}_2\overrightarrow{e_{y2}} + \ddot{z}_2\overrightarrow{e_{z2}}) + 2(\dot{x}_2\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} + \dot{y}_2\dot{\overrightarrow{e_{y2}}} + \dot{z}_2\dot{\overrightarrow{e_{z2}}}) + (x_2\ddot{\overrightarrow{e_{x2}}} + y_2\ddot{\overrightarrow{e_{y2}}} + z_2\ddot{\overrightarrow{e_{z2}}})$$

$$\vec{a_e} = \vec{a_0} + (x_2\ddot{\overrightarrow{e_{x2}}} + y_2\ddot{\overrightarrow{e_{y2}}} + z_2\ddot{\overrightarrow{e_{z2}}})$$

$$\vec{a_c} = 2(\dot{x}_2\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} + \dot{y}_2\dot{\overrightarrow{e_{y2}}} + \dot{z}_2\dot{\overrightarrow{e_{z2}}})$$

On a

$$\vec{a_1} = \vec{a_2} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

Accélération d'entrainement

Accélération de coriolis

Théorème 2.3 : Égalité du vecteur accélération

$$\vec{a_1} = \vec{a_2} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

avec $\vec{a_e} = \vec{a_0} + (x_2\ddot{\overrightarrow{e_{x2}}} + y_2\ddot{\overrightarrow{e_{y2}}} + z_2\ddot{\overrightarrow{e_{z2}}})$ et $\vec{a_c} = 2(\dot{x}_2\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} + \dot{y}_2\dot{\overrightarrow{e_{y2}}} + \dot{z}_2\dot{\overrightarrow{e_{z2}}})$

Propriétés

- Si les 2 référentiels sont galiléens, les 2 accélérations sont égales : $\vec{a_1} = \vec{a_2}$
- Si $\vec{v_2} = 0, \vec{a_c} = 0$
- Si $\vec{e_1} // \vec{e_2}, \vec{a_c} = 0, \vec{a_e} = 0, \vec{a_1} = \vec{a_0} + \vec{a_2}$

6.3 Référentiel tournant

On définit un axe de rotation $\vec{n}$ et un angle α. Soit $\vec{\mu'}$ le vecteur de changement de dircetion.

On a

$$\vec{\mu'} = \vec{\mu} + \mathrm{d}\vec{\mu_\alpha} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{n} \wedge \vec{\mu} = \omega\vec{n} \wedge \vec{\mu} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mu} = \dot{\vec{\mu}}$$

avec $\vec{\omega} = \vec{n} \cdot \omega$

On a alors :

$$\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{x2}}, \ldots$$

Puis :

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} + (x_2\dot{\overrightarrow{e_{x2}}} + \ldots) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_e} &= \overrightarrow{a_0}(x_2\ddot{\overrightarrow{e_{x2}}} + \ldots) + (x_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{x2}}) + \ldots)\\ &= \overrightarrow{a_0} + (x_2\dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge \overrightarrow{e_{x2}} + \ldots)\\ &= \overrightarrow{a_0} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})\end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_2}$$

Théorème 3.1 : Vitesse d'entrainement dans un référenriel tournant

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_2}$$

avec $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n} \cdot \omega$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire de l'axe de rotation et ω la pulsation.

Théorème 3.2 : Accélération d'entrainement dans un référenriel tournant

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_0} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

avec $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n} \cdot \omega$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire de l'axe de rotation et ω la pulsation.

Théorème 3.3 : Accélération de coriolis dans un référenriel tournant

$$\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_2}$$

avec $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n} \cdot \omega$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire de l'axe de rotation et ω la pulsation.

6.4 Forces d'inertie

6.4.1 Principe

Quand R2 se déplace avec une accélération par rapport à R1, le référentiel est non galiléen. On peut simuler les accélérations du nouveau référentiel avec les forces d'entrainement et de coriolis.

$$\begin{aligned} m\vec{a_1} &= \vec{F} \\ m(\vec{a_2} + \vec{a_e} + \vec{a_c}) & \\ m\vec{a_2} &= \vec{F} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c} \\ &= \vec{F} + \vec{F_e} + \vec{F_c} \end{aligned}$$

Théorème 4.1 : Accélération et forces dans un référenriel non galiléen

$$m\vec{a_2} = \vec{F} + \vec{F_e} + \vec{F_c}$$

avec $\vec{F_e} = -m\vec{a_e}$ et $\vec{F_c} = -m\vec{a_c}$ les 2 forcees d'intertie d'entrainement et de coriolis

6.4.2 Exemples

Accélération linéaire

Comme $\vec{\omega} = 0, \vec{a_c} = 0$ mais on a $\vec{a_e} = \vec{a_0}$, donc $\vec{F_e} = -m\vec{a_0}$.

Pendule

On a $m\vec{a_2} = 0 = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_0}$. On en déduit que

- $\tan\alpha = \frac{a_0}{g}$
- $-\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a_0}) = m\overrightarrow{a_{app}}$: Le poids apparent devient plus grand.

Ascensseur

$m\vec{a_2} = 0 = m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a_0}$ car par rapport à R2 l'accélération est nulle.
On en déduit que $-\vec{R} = m(\vec{g} - \vec{a_0})$

Dans le cas d'une chute libre, $\vec{a_0} = \vec{g}$ et la force de réaction est nulle

Rotation uniforme

Dans ce cas, $\overrightarrow{a_c} = \dot{\overrightarrow{\omega}} = 0$. De plus, $\overrightarrow{a_0} = 0$, donc $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) = -\omega^2 \wedge \overrightarrow{HM}$ avec HM le rayon de rotation.

Dans ce cas, $\overrightarrow{F_e} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$

6.5 Application : Exercice 21

Sur la surface de la terre, à une lattitude nord donnée par un angle θ, on choisit un choisit un repère solidaire à la Terre, associé au repère orthonormé direct R où $\overrightarrow{e_z}$ est selon la direction radiale sortnte du centre de la Terre, $\overrightarrow{e_x}$ est selon la direction de l'ouest et $\overrightarrow{e_y}$ vers le sud. On lance une pierre verticalement à partir de O avec une vitesse initiale $v_0 = v_0\overrightarrow{e_z}$. On néglige les frottements de l'air.

1. Calculer la composante selon $\overrightarrow{e_z}$ de l'accélération d'entrainement
2. Donner position et vitesse de la pierre selon z.
3. Calculer $\overrightarrow{a_c}$ selon x
4. Donner le décalage vers l'ouest.

6.5.1 Accélération d'entrainement

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times60\times60}$

On a : $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})$

De plus $\overrightarrow{a_0} = 0$ car il n'y a pas de déplacement du référentiel, et $\dot{\overrightarrow{\omega}} = 0$ car la pulsation est constante.

On donne l'expression de $\omega = 0\overrightarrow{e_x} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_y} + \cos(\theta)\omega\overrightarrow{e_x}$ et de $\overrightarrow{CO} = R\overrightarrow{e_z}$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_e} &= \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{CO}) \\
&= \overrightarrow{\omega} \wedge ((-\omega\sin(\theta)\overrightarrow{e_y} + \omega\cos(\theta)\overrightarrow{e_z}) \wedge R\overrightarrow{e_z}) \\
&= \overrightarrow{\omega} \wedge (-\omega R\sin(\theta)\overrightarrow{e_x}) \\
&= -\omega^2\sin^2(\theta)R\overrightarrow{e_z} - \omega^2 R\cos(\theta)\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}
\end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 R(\cos(\theta)\sin(\theta)\overrightarrow{e_y} + \sin^2(\theta)\overrightarrow{e_z})$$

$a_{e,z} = -\omega^2 R\sin^2(\theta)$

On remarque que l'accélération due à l'accélération d'entrainement est 3 odg fois plus petit que celle due à la gravité.

6.5.2 Position et vitesse

$z(t) = v_z = \dot{z}$

On applique la PFD : $m\vec{a} = -mg\vec{e_z} - m\vec{a_c}$. On ne met pas la force d'entrainement car on l'a négligée dans la partie précédente. Donc :

$$m\vec{a} = -mg\vec{e_z} - m\vec{a_c}$$
$$-mg\vec{e_z} - m2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

On peut décomposer selon les 3 axes :

Selon z :

$$m\ddot{z} = -mg$$
$$\Rightarrow v_z = v_0 - gt$$
$$\Rightarrow z(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

On ne met pas l'accélération de coriolis car celle-ci s'exprime selon le vecteur x ($\omega, v \in Ozy$)

Le temps de chute est de $T = \frac{2v_0}{g}$

6.5.3 Accélération de coriolis

On fait une approximation en supposant que la vitesse est seulement selon l'axe z.

$$\begin{aligned}\vec{a_c} &= 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ &= 2\omega(-\sin(\theta)\vec{e_y} + \cos(\theta)\vec{e_z}) \wedge (v_0 - gt)e_z \\ &= -2\omega\sin(\theta)(v_0 - gt)\vec{e_x}\end{aligned}$$

6.5.4 Décalage vers l'ouest du point de chute

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -ma_{c,x}\vec{e_x} \\ \ddot{x} &= 2\omega\sin(\theta)(v_0 - gt) \\ \dot{x} &= 2\omega\sin(\theta)(v_0 t) - \omega\sin(\theta)gt^2 \\ x &= \omega\sin(\theta)v_0 t^2 - \omega\sin(\theta)g\frac{t^3}{3}\end{aligned}$$

En utilisant le temps trouvé dans les questions précédentes, on trouve que

$$x(T) = \frac{4}{3}\frac{\omega v_0^3}{g^2}\sin(\theta)$$