Chapitre 2

Cinématique, forces, équilibre

2.1 Rappel de géométrie vectorielle

2.1.1 Coordonnées et composantes

Soit M un point de l'espace muni du repère $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} + c\overrightarrow{e_z}$.

Les quantités scalaires x, y et z sont les coordonnées du point M dans le repère R. On écrit $M(x, y, z)_R$.

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut se décomposer comme $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$

Les scalaires u_x, u_y, u_z sont appelées composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le repère R. On écrit $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, u_z)_R$.

Exercice 2.2.2

2.1.2 Produit scalaire et norme

Norme

Si la base B est une base orthonormée directe, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Produit scalaire entre 2 vecteurs

Théorème 1.1 : Définition

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$.

Proriétés du produit scalaire :

- C'est un nombre
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$
- $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} = 0$
- Il est commutatif : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ car $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.
- Il est bilinéaire : $(\lambda\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v})$ cot $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \beta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
- Dans une BOND, on a $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}(= 0 \iff i \neq j \vee = 1 \iff i = j)$.
- Dans une BOND : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = u_x v_x + u_y v_z + u_z v_z$

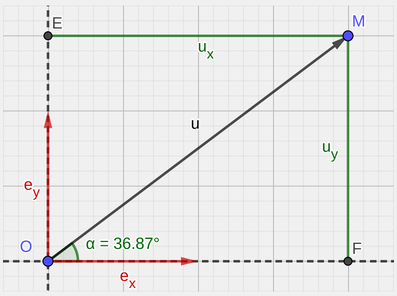
2.1.3 Projection sur une base

Méthode 1

Soit un vecteur $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$. On peut retrouver les composantes du vecteur en effectuant le produit scalaire entre ce vecteur et les vecteurs de la base.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = u_x$. De même, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = u_y$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z} = u_z$. On peut donc écrire $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x}) \cdot \overrightarrow{e_x} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y}) \cdot \overrightarrow{e_y} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z}) \cdot \overrightarrow{e_z}$.

Exemple en 2D



$u_x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{e_x}|| \cos\theta = ||\overrightarrow{u}|| \cos\theta$

$u_y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{e_y}|| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = ||\overrightarrow{u}|| \sin(\theta)$

Méthode 2

Projeter $\overrightarrow{u}$ dans la base revient à écrire $\overrightarrow{u}$ sous la forme $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y}$ et déterminer u_x, u_y. On se place dans un triangle rectangle du schéma précédant

On utilise les relations de trigonométrie : $u_x = ||\overrightarrow{u}|| \cos(\theta)$ et $u_y = ||\overrightarrow{u}|| \sin(\theta)$

2.1.4 Produit vectoriel

Soit 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ est l'unique vecteur tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$

de norme $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\theta)|$ avec θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, l'ensemble $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe.

$\vec{w}$ est unique car on a défini sa direction, sa norme et son sens.[i] Quand on le fait de gauche à droite, le produit est positif, dans le cas contraire, il est négatif.

> i Info
> Sur le sens du produit dans une BOND

Calcul avec les coordonnées

Le produit vaut $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$

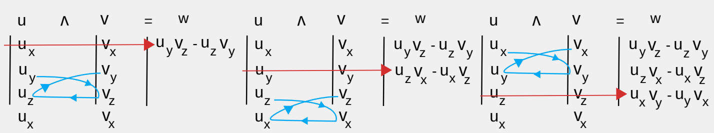
Méthode du Gamma

On écrit côte à côte les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on veut faire le produit vectoriel.

On réécrit u_x en-dessous de u_z et v_x en-dessous de v_z

Pour avoir les coordonnée x, on cache les coordonnées suivant x et on fait le "calcul en γ.

Pour obtenir les autres coordonnées, on procède de la même manière.



2.2 Cinématique

C'est l'étude du mouvement sans ses causes.

2.2.1 vecteur position

Soit un point M de l'espace repéré par rapport à un repère R composée d'une BOND. Il représente la position du centre de masse de l'objet. Il dépend du temps car la position de M varie au cours du temps.

Le vecteur $\overrightarrow{OM(t)} = x_m(t)\overrightarrow{e_x} + y_m(t)\overrightarrow{e_y} + z_m(t)\overrightarrow{e_z}$

Les quantités $x_m(t), y_m(t) et z_m(t)$ sont les équations horaire du mouvement. Ce sont des équations paramétriques qui indiquent quel mouvement va suivre M. On peut en déduire l'équation cartésienne de la trajectoire en supprimant la dépendance au temps

2.2.2 Vecteur vitesse

Direction du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement

Composantes du vecteur vitesse

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{x}_m(t)\overrightarrow{e_x} + \dot{y}_m(t)\overrightarrow{e_y} + \dot{z}_m(t)\overrightarrow{e_z}$$

2.2.3 Vecteur accélération

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{M/R}} &= \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} \\ &= \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}\end{aligned}$$

Direction du vecteur accélération

Dans le cas général, il n'est pas tangent à la trajectoire.

Composantes du vecteur accélération

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}_m(t)\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}_m(t)\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}_m(t)\overrightarrow{e_z}$$

2.2.4 Changement de référentiel dans le cas d'une translation

Soit 2 référentiels R et R' tels que R' est une translation rectiligne par rapport à R avec une vitesse $\overrightarrow{V_{R'/R}}$

Dans ce cas on a $\overrightarrow{V_{M/R}} = \overrightarrow{V_{M/R'}} + \overrightarrow{V_{R/R'}}$. C'est la loi de composition des vitesses.

2.2.5 Types de mouvements

Mouvement uniforme

Mouvement pour lequel $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ est constant.

> **Implications fausse**
>
> Ne veut pas dire que le vecteur vitesse est constant ou que le vecteur accélération est nul (voir orbite de la terre dans le repère de Frenet)

On a un mouvement uniforme si $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} = 0$, donc que $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{a}$.

Conséquences :

Si $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} > 0$ alors $\frac{d||\overrightarrow{V_{M/R}}||}{dt} > 0$ et $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ augmente au cours du temps (mouvement accéléré).

Si $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} < 0$ alors $\frac{d||\overrightarrow{V_{M/R}}||}{dt} < 0$ et $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ diminue au cours du temps (mouvement décéléré).

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} > 0$ si $\cos\alpha > 0 \iff \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} < 0$ si $\cos\alpha < 0 \iff \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

2.3 Rappels sur les lois de Newton

2.3.1 Référentiel galiléen

C'est un référentiel dans lequel un système isolé (pas de forces) ou pseudo-isolé (résultante des forces nulle) est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme (principe d'inertie). C'est un idéal vers lequel on peut tendre mais qu'on atteint pas.

Référentiel géocentrique

L'origine est le centre de la Terre avec les axes pointés vers des étoiles lointaines ($\simeq$ fixe) mais il est en rotation autour du Soleil, donc considéré comme galiléen si le temps du mouvement est petit par rapport à une année.

Référentiel de Copernic

L'origine est le centre de gravité du système solaire mais aussi en rotation autour du centre de la galaxie $250 \cdot 10^6$ans.

2.3.2 Lois de Newton

Principe d'inertie

Il existe un certain type de référentiels, dits galiléens, dans lesquels ces principes s'appliquent.

Principe fondamental de la dynamique

Il s'exprime à partir de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/R}} = m\overrightarrow{v}$:

Théorème 3.1 : Relation

$$\frac{d\overrightarrow{p_{M/R}}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Dans la pratique, la masse du système est souvent constante, dans ce cas :

Théorème 3.2 : Relation

$$\frac{d\overrightarrow{p_{M/R}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt} = m\overrightarrow{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Principe d'action réciproque

La force exercée par A sur B vaut l'opposée de la force exercée par B sur A : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$.

2.3.3 Exemples de forces

Force gravitationnelle

C'est la première intéraction fondamentale

Soit 2 corps de masse m_A et m_B. On a :

$$\overrightarrow{F_{g,A/B}} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\overrightarrow{e_r}$$

Remarque

Dans le contexte de la relativité générale, le concept de force gravitationnelle est remplacé par une courbure de l'espace-temps produite par des objets massifs.

Force électrostatique ou force de Coulomb

Soit 2 charges q_A et q_B, distante de r. On a, avec ϵ_0 la permittivité du vide :

$$\overrightarrow{F_{e,A/B}} = k_e\frac{q_A q_B}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Si les 2 charges sont de même signe, la force est répulsive, dans la cas contraire, elle est attractive.

À l'échelle des particules, cette force domine sur la force gravitationnelle.

Poussée d'Archimède

Théorème 3.3 : Expression de la poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide (gaz ou liquide) est soumis à une force, appelée poussée d'Archimède qui à la même direction que le poids, de sens opposé et dont la norme est égale au poids du volume de fluide déplacé.

2.3.4 Équilibre statique

Dans un référentiel galiléen, le principe d'inertie s'applique t on a l'équivalence $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Le système est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme

2.4 Frottements solides

2.4.1 Approche phénoménologique

Théorème 4.1 : Définition

Elles sont liée au contact entre 2 surfaces

Le bilan des forces est $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{R}$ et on a : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ On aura donc nécessairement pour $\overrightarrow{R}$

- une composante normale $\overrightarrow{N}$ qui s'oppose au poids
- une composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ qui s'oppose à $\overrightarrow{F}$. Elle correspond aux forces de frottement solide et dépend des matérieux des surfaces en contact

Si la norme de $\overrightarrow{F}$ augmente, l'objet finit par se mettre en mouvement.

2.4.2 Lois de Coulomb

Elles sont empirique, i.e déduites de l'expérience. La réaction du support est décomposée en $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$

Théorème 4.2 : Lois

- Il y a équilibre si $||\overrightarrow{T}|| \leq \mu_s ||\overrightarrow{N}||$
- Si il y a un glissement, $||\overrightarrow{T}|| = \mu_d ||\overrightarrow{N}||$ et $\overrightarrow{T}$ dans la direction opposé au mouvement, c'est à dire : $\overrightarrow{T} = -||\overrightarrow{T}|| \times \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.