Chapitre 3

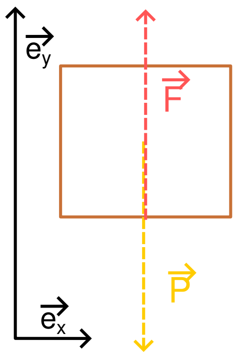
Systèmes du premier ordre

Dans ce chapitre, on va considérer des forces du type $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec α une constante positive.

3.1 Mouvement avec frottements fluides

3.1.1 Exemple : Largage d'un colis

On obtient les 2 équations



Système = Colis M. On se met dans le référentiel terrestre muni du repère R

On fait un bilan des forces : $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$

On écrit le PDF : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_f}$

On projette les forces : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{F_f} = -\alpha(V_x\overrightarrow{e_x} + V_y\overrightarrow{e_y})$ ×

On réécrit le PFD, projeté selon les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = & 0 + -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = & -mg + -\alpha\dot{y} \end{cases}$$

× **Difficulté**
Lorsque l'on projette la force, on ne sait rien du vecteur vitesse, on ne peut pas formellement savoir sa direction (même si on peut s'en douter), c'est pourquoi le signe de $\overrightarrow{F_f}$ est indépendant de l'axe choisi.

On transforme les équations

On obtient une équation linéaire :

$$\begin{cases} m\dot{v_x} = & 0 + -\alpha v_x \\ m\dot{v_y} = & -mg + -\alpha v_y \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} m\dot{v_x} + \alpha v_x = & 0 \\ m\dot{v_y} + \alpha v_y = & -mg \end{cases}$$

On divise tout par m :

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{\alpha}{m} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{\alpha}{m} v_y = & -g \end{cases}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$:

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{1}{\tau} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{1}{\tau} v_y = & -g \end{cases}$$

On résout les équations

La première équation est homogène, donc $v_x(t) = Ce^{-t/\tau}$. À $t = 0, v_x(0) = Ce^0 = C$, donc $C = V_0$. Finalement, $v_x(t) = V_0 e^{-t/\tau}$.

Dans ce cas, $v_x(t) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

La deuxième équation est non homogène : On écrit donc l'équation sous forme homogène : $\dot{v}_{y,h}(t) + \frac{1}{\tau} v_{y,h} = 0$. Donc : $v_{y,h} = De^{-t/\tau}$.

On cherche maintenant une solution particulière. Le second membre est constant, on cherche $v_{y,p}$ constant, (avec sa dérivée nulle), donc $v_{y,p} = -\tau g$.

Donc, $v_y(t) = De^{-t/\tau} - \tau g$ ✕ .

À $t = 0, v_y(0) = 0$ et $v_y(0) = De^0 - \tau g = D - \tau g = 0 \iff D = \tau g$. Donc : $v_y(t) = \tau g(e^{-t\tau} - 1)$.

✕ **Difficulté**
On trouve la valeur de D à partir de la solution complète, et non à partir de la solution homogène.

On va tendre vers un vecteur vitesse

Théorème 1.1 : Vecteur vitesse limite dans cette situation

$$v_{lim} = 0\overrightarrow{e_x} - \tau g\overrightarrow{e_y} = -\tau g\overrightarrow{e_y}$$

On peut noter qu'il s'agit de la valeur obtenue quand l'accélération s'annule : quand la vitesse tend vers une constante, l'accélération est nulle.

Intégration

On intègre $v_x(t)$: $x(t) = -\tau V_0 e^{-t/\tau} + A$. Avec les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $x(t = 0) = -\tau V_0 + A = 0$ et $A = \tau v_0$. $x(t)$ tend vers τV_0

quand x tend vers l'infini.

On intègre $v_y(t) : y(t) = \tau g(-\tau e^{-t/\tau} - t) + B = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$. Avec les conditions initiales : $y(0) = h$ et $y(t = 0) = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$ et $B = h + \tau^2 g$.

Au bout de combien de temps v_y atteint-t-elle 95% de la vitesse limite ?

v_y tend vers $-\tau g$, vitesse limite. On veut $v_y(t_{95}) = 0.95 \times -\tau g$. Donc $\tau g e^{-t_{95}/\tau} = 0.05 \tau g$, donc $t_{95} = -\tau \ln(0.05)$. Donc au bout de 3τ, v_y atteint 95% de sa valeur limite.

> **Astuce**
> Si le temps de chute est petit devant τ, on calcule la tangente à v_y au voisinage de 0 en calculant la dérivée de v_y, qui est l'accélération. L'équation de la tangente en 0 est $-gt$.

3.2 Radioactivité

3.2.1 Rappels sur le noyau des atomes

$^a_z X$ avec Z le nombre de protons, qui détermine le nom de l'espèce et A le nombre de nucléons. Le nombre de neutrons vaut $A - Z$.

3.2.2 Types de réactions

> **Types de Radioactivité**
>
> Radioactivité α : $^A_Z X \rightarrow^{A-4}_{Z-2} X' +^4_2 \alpha + \gamma$
>
> Radioactivité $\beta+$: $^A_Z X \rightarrow^{A}_{Z-1} X' +^0_1 e + \nu + \gamma$ avec ν un neutrino.
>
> Radioactivité $\beta-$: $^A_Z X \rightarrow^{A}_{Z+1} X' +^0_{-1} e + \bar{\nu} + \gamma$ avec $\bar{\nu}$ un antineutrino.

Capture électronique : $^A_Z X +^0_{-1} e \rightarrow^A_{Z-1} X' + \nu + \gamma + X$ avec X des rayons X

3.2.3 Lois de décroissance radioactive

Pour chaque réaction radioactive, on peut déterminer la probabilité de désintégration du noyau pendant un intervalle de temps compris entre t et $t + dt$.

On alors $dP = \lambda dt$. Dans le SI, λ est en s^{-1}.

> **Info**
> Si λ est donné en s^{-1}, si il est donné en année^{-1}, T est en années.

Si on dispose de n noyaux, on peut déterminer le nombre de désintégrations par seconde = $N \times \lambda dt$.

Donc la variation du nombre de noyaux n pendant dt : $dN = -N\lambda dt$. On divise tout par dt : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, et on aboutit à une EQD du premier ordre linéaire à coefficients constants : $\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$

On cherche une solution du type Ce^{rt} avec $r = -\lambda$, donc $N(t) = Ce^{-\lambda t}$. Si à $t = 0$, $N(0) = N_0$ noyaux, alors $C = N_0$ et $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Période de demie-vie T : temps au bout duquel le nombre initial de noyaux est divisé par 2 :

$$
\begin{aligned}
N_0 e^{-\lambda t} &= \frac{N_0}{2} \\
e^{-\lambda t} &= \frac{1}{2} \\
\ln(e^{-\lambda t}) &= \ln(\frac{1}{2}) \\
-\lambda T &= -\ln(2) \\
T &= \frac{\ln(2)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Difficulté
Pour déterminer la durée de vie moyenne de l'échantillon τ, on fait $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Tout comme pour la vitesse limite, au bout de 3τ, on aura fait disparaître 95% de l'échantillon, il en restera donc plus que 5%.

Astuce
Pour réduire au millième l'échantillon, il faut 10 T car $\frac{\frac{\ln(1000)}{\lambda}}{\frac{\ln(2)}{\lambda}} = \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} \simeq \frac{\ln(2^{10})}{\ln(2)} = 10\frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 10$

3.2.4 Activité

Définition : Nombre de désintégrations par seconde. Elle se mesure en Becquerel (Bq).

$$A(t) = \lambda \times N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

3.2.5 Élément fils

$M(t) =$ nombre de noyaux de l'élément fils, soit le nombre d'éléments père détruits.

$$M(t) = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$