4

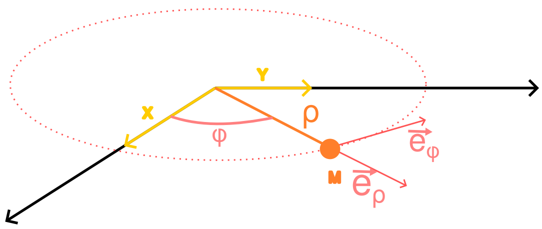
Chapitre

Mouvements circulaires et systèmes de coordonnées

4.1 Coordonnées polaires

Il s'agit d'un système de coordonnées qui permet de repérer l'espace à 2 dimensions.

4.1.1 Base polaire



On introduit une base dite locale (elle dépend du point où l'on se trouve. On définit

- $\vec{e_\rho}$, unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OM}$. Ainsi, $\vec{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$
- $\rho = ||\overrightarrow{OM}|| > 0$
- $\varphi = (\vec{e_x}, \vec{e_\rho})$
- $\vec{e_\varphi}$ orthogonal à $\vec{e_\rho}$ et dans le sens de l'angle φ ×

× **Difficulté**
Il est toujours dirigé dans le sens trigonométrique, même si φ est négatif!

Cette base dépend du point où l'on se trouve. La position de chaque point est définie par ρ et φ.

Relation entre base polaire et cartésienne

- $\vec{e_\rho} = \cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}$

- $\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y}$

4.1.2 Vecteur position

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$ ×

> × **Difficulté**
> Il n'y a pas de composantes selon $\overrightarrow{e_\varphi}$.

4.1.3 Vecteur vitesse

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\\ &= \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho})\\ &= \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= -\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\overrightarrow{e_y}\\ &= \frac{d\varphi}{dt}(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y})\\ &= \dot{\varphi}(\overrightarrow{e_\varphi})\end{aligned}$$

> **Théorème 1.1 :** Vitesse en coordonnées polaire
>
> $\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

4.1.4 Vecteur accélération en polaire

Calcul de la dérivé du vecteur φ

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y})\\ &= -\cos(\varphi)\times\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_x} - \sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_y}\\ &= -\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_y})\\ &= -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}\end{aligned}$$

On dérive $\vec{v}$

> **Astuce**
> Pour dériver $\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$, on va utiliser la formule $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi})\\ &= \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\\ &= \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}(\overrightarrow{e_\varphi}) + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\rho}\\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

Théorème 1.2 : accélération en coordonnées polaire

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

4.1.5 Cas particulier du mouvement circulaire

La distance du point M à un point O, choisi comme l'origine du repère, reste constante au cours du temps. Dans la base polaire, on a

- $\rho(t) = R =$ Constante.
- $\dot{\rho}(t) = 0$ car la dérivée d'une constante est nulle.

Expression des vecteurs

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} = R\vec{e_\rho}$$

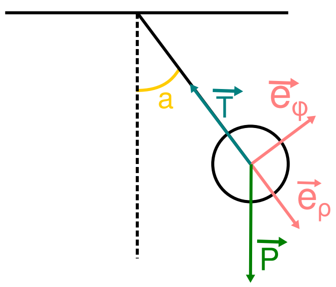
$$\vec{v} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$ i

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(R\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) = R\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} + R\dot{\varphi}\frac{\vec{e_\varphi}}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - R\dot{\varphi}^2\vec{e_\rho}.$$ i

i **Info**
On retrouve le même résultat en partant de l'expression générale : $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} = R\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

i **Info**
On la retrouve à partir de l'expression de l'accélération en polaire. En effet, les termes avec la dérivée première ou seconde s'annulent.

Exemple du pendule



On étudie le mouvement de la masse M de masse m attachée au bout d'un fil de longueur l.

On a $||\overrightarrow{OM}|| = l =$ qui est constante. On a donc un mouvement circulaire.

Le système est la masselotte, avec un référentiel terrestre muni de la base polaire.

On fait le bilan des forces : $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$.

On projette dans la base : $\vec{T} = -T\vec{e_\rho}$ et $\vec{P} = mg\cos(\varphi)\vec{e_\rho} - mg\sin(\varphi)\vec{e_\varphi}$

On dérive 2 fois pour trouver l'accélération : $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{e_\varphi}$, $\overrightarrow{v} = l\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$, $\overrightarrow{a} = -l\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + l\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$. En appliquant le PFD, on obtient 2 équations scalaires :

$$\begin{cases} m(-l\dot{\varphi}^2) & = mg\cos(\varphi) - T \\ m(l\ddot{\varphi}) & = -mg\sin(\varphi) + 0 \end{cases}$$

On utilise l'équation 2, sans T à l'intérieur : $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi)$ et $l\ddot{\varphi} = -g\sin(\varphi)$

On a une équation de la forme $l\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi) = 0$ et $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$ Il s'agit d'une équation différentielle du second degré homogène, mais non linéaire.

4.1.6 Cas du mouvement circulaire uniforme

Pulsation

La vitesse V est constante, tout comme $||\overrightarrow{OM}|| = R$.

La vitesse vaut $R\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ et $||\overrightarrow{v}|| = V = R|\dot{\varphi}|$.

Donc $|\dot{\varphi}| = \frac{V}{R}$.

Dans ce cas, la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est constante et on l'appelle la pulsation, notée Ω ou ω. Elle se mesure en rad·s^{-1}. ✕

✕ **Difficulté**
On l'écrit avec ω que quand elle est constante.

On suppose que $\varphi(t)$ est orienté de sorte que $\dot{\varphi} > 0$. Dans ce as, $|\dot{\varphi}| = \dot{\varphi} = \frac{V}{R}$.

Expression des vecteurs

On obtient : $\overrightarrow{v} = V\overrightarrow{e_\varphi} = R\omega\overrightarrow{e_\varphi}$ et

$\overrightarrow{a} = -R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + R\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} = -R\omega^2\overrightarrow{e_\rho} = -R\frac{V^2}{R^2}\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{V^2}{R}\overrightarrow{e_\rho}$.

Nouveaux éléments de description

- La pulsation ω = nombre de radians parcourus par secondes (constante)
- La période T = Temps nécessaire pour faire un tour : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ On peut retrouver cette relation avec $v = d/t$.
- La fréquence : Nombre de tours éffectués par seconde : $\nu = \frac{1}{T}$.

4.1.7 Exemple : Orbite de la Terre autour du Soleil

Hypothèse : Trajectoire circulaire.

Schéma 4.1.6.1

On obtient ces expressions :

$\overrightarrow{ST} = R\overrightarrow{e_\rho}$,

$\overrightarrow{v} = R\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

$\overrightarrow{a} = -R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + R\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

On fait le bilan des forces : $\overrightarrow{F_g} = -G\frac{m_s m_t}{d^2}\overrightarrow{e_\rho}$.

On applique le PFD : $m_T\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_g}$.

Donc on obtient 2 équations scalaires :

$$\begin{cases} -R\dot{\varphi}^2 & = -G\frac{m_s}{d^2} \iff R\dot{\varphi}^2 & = G\frac{m_s}{d^2} \\ R\ddot{\varphi} & = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\ddot{\varphi} = 0$, donc $\dot{\varphi}$ est constant et on le not alors ω.

Donc $\overrightarrow{v} = R\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} = R\omega\overrightarrow{e_\varphi}$.

De plus, $R\omega^2 = \frac{Gm_s}{R^2} \iff \omega = \sqrt{\frac{GM_s}{R^3}}$.

On peut en déduire :

- La vitesse de la terre sur son orbite : $v = R\omega = R \times \sqrt{\frac{GM_s}{R^3}} = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$
- La période de la terre sur son orbite : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{R^3}GM_s$.

Période de la terre sur son orbite : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM_s}{R^3}}}$.

On est dans un cas particulier de la troisème loi de Kepler : $T^2/R^3 = 4\pi^2 \times \frac{R^3}{GM_s} \times \frac{1}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$.

4.2 Coordonnées cylindriques

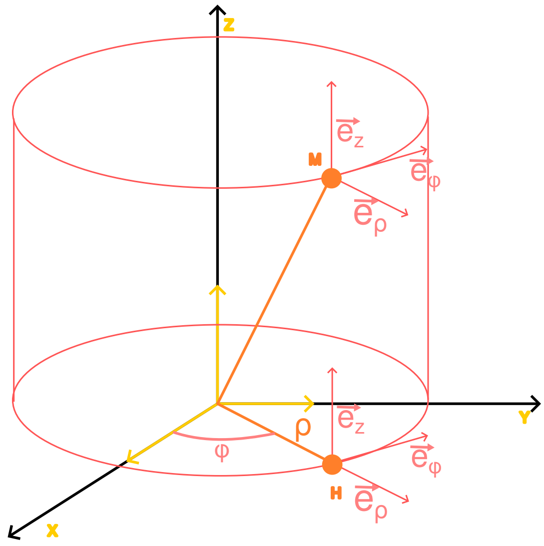
C'est un système de coordonnées permettant de repérer l'espace à 3 dimensions. Le principe : On construit la base cylindrique avec

- Une base polaire du type $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$
- Un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ orthogonal à $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\phi})$ orienté tel que $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ soit une BOND. le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ reste fixe au cours du temps.

- $\rho(t) = OH$
- $\varphi(t) = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH})$
- $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$.

Lien entre les cordonnées :

- $\rho = \sqrt{x^{+}y^2}$
- $\tan\varphi = \frac{y}{x}$
- $z = z$
- $x = \rho\cos(\varphi)$
- $y = \rho\sin(\varphi)$



Expression des vecteurs

La vitesse : $\overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + z\overrightarrow{e_z}$

L'accélération : $\overrightarrow{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$ C'est comme l'accélération en polaire mais on rajoute les cordonnées en z.