Chapitre 5

Champ électrique et magnétique

5.1 Champs vectoriels

5.1.1 Champ électrique

C'est un champ vectoriel crée par une particule chargée ou bien une distribution de particules chargées.

Il s'écrit $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)$ et s'exprime en $V \cdot m^{-1}$.

> **Théorème 1.1 :** Force électrique
>
> Une particule de charge q plongée dans le champ $\overrightarrow{E}$ est soumise à une force $\overrightarrow{F_e} = q \times \overrightarrow{E}$.

5.1.2 Champ magnétique

C'est aussi un champ vectoriel qui caractérise les effets magnétiques du courant électrique ou de matériaux magnétiques par essence [i] . Il est noté $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)$ et s'exprime en Teslas, noté T. Le champ de la Terre est $47\mu T$.

> **i Info**
>
> aimants permanent, noyau de la Terre, fil parcouru par un champ électrique, Soleil

> **Théorème 1.2 :** Force de Laplace
>
> La force produite par le champ vaut :$\overrightarrow{F_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

Elle est nulle si la particule est au repos ou si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{B}$ sont colinéaires .

> **Astuce**
>
> En effet, le produit vectoriel est alors nul et la force aussi

5.1.3 Force magnétique + électrique

Théorème 1.3 : Force de Lorenz

La force vaut $q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

5.1.4 Ordre de grandeurs

Faut-il prendre en compte la force de gravitation dans l'étude de la trajectoire d'une particule chargé soumise à un champ électrique et magnétique ?

Exemple

Mouvement d'un électron avec

- une vitesse de 1km/s (vitesse faible)
- B = 10^{-4}T
- E = 100 $V \cdot m^{-1}$

ODG des forces :

- $F_g = mg = 10^{-30} \times 10 = 10^{-29}N$
- $F_e = |q|E = 10^{-19} \times 100 = 10^{-17}?$
- $F_b = |qV|B = 10^{-19} \times 1000 \times 10^{-4} = 10^{-20}$

Le rapport entre F_G et F_e donne $10^{-12} << 1$, tout comme celui entre F_G et F_b. On peut donc négliger la force de gravitation

5.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique constant

On considère une particule de charge q initialement à l'origine avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = V_0\overrightarrow{e_x}$, plongée dans un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_y}$.

Astuce

Le mouvement est dans le plan (Oxy) car pas de force selon z ni de vitesse initiale.

On applique le PFD : $\vec{a}m = q\vec{E}$.

On a donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = & 0 \\ m\ddot{y} = & qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = & 0 \\ \ddot{y} = & \frac{qE}{m} \end{cases}$$

On intègre ensuite une première fois pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x} & = k \\ \dot{y} & = qEt + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t=0) & = V_0 = k \Rightarrow k = V_0 \\ \dot{y} - t = 0) & = 0 = D \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

Puis une deuxième fois pour obtenir le mouvement :

$$\begin{cases} x & = V_0 t + C' \\ y & = \frac{qE}{m}\frac{t^2}{2} + D' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) & = 0 = C' \\ y(0) & = 0 = D' \end{cases}$$

On obtient une trajectoire parabolique en trouvant l'équation cartésienne : $y = \frac{qE}{m}\frac{x^2}{2V_0^2}$

Si $\vec{E}$ était colinéaire à $\vec{V_0}$, la trajectoire serait rectiligne.

5.3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant

> **!** Nom
>
> On appelle ça le mouvement cyclotron.

La particule est soumise à la force liée au champ magnétique $F_b = q\vec{B} \wedge \vec{B}$. Elle est orthogonale à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

5.3.1 Analyse qualitative

Appliquons le PFD : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

On remarque 2 choses, par définition du produit vectoriel :

- $\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow$ le mouvement est uniforme. Donc $||\vec{v}|| = Cst$
- $\vec{a} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{B} = 0 \iff \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = 0$.
  Le champ magnétique $\vec{B}$ est constant, donc on a : $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{B}) = 0$ puis $\frac{d}{dt}(||\vec{v}||||\vec{B}|| \times \cos(\alpha)) = 0$ par définition du produit scalaire.

> **i** Info
>
> Car $||\vec{v}||$ et $||\vec{B}||$ sont constants.

Finalement, $\frac{d}{dt}\cos\alpha = 0$ [i] donc α est constant. Donc l'angle entre $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$ reste constant au cours du mouvement.

5.3.2 Étude du mouvement

On étudie le mouvement d'une particule dans un champ magnétique : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{e_x}$.

On applique le PFD : $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

On fait le produit vectoriel pour trouver que

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} & = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{v_x} & = qB\dot{v_y} \quad \text{(i)} \\ m\dot{v_y} & = -qB\dot{v_x} \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

On obtient des EQD couplées.

Découplage des EQD

On introduit la grandeur complexe $\underline{V} = V_x + iV_y$. Dans ce cas, $\dot{\underline{V}} = \dot{V_x} + i\dot{V_y}$, puis on calcule (i) $+ i \times$ (ii) :

> **Astuce**
> L'astuce pour faire apparaitre un i est de considérer que $1 = -i^2$

$$\begin{aligned} m\dot{v_x} + im\dot{v_y} &= qBV_y - iqBV_x \\ m(\dot{V_x} + i\dot{V_y}) &= qBV_y - iqBV_x \\ m(\underline{V}) &= qBV_y - iqBV_x \\ m(\underline{V}) &= -i^2qBV_y - iqBV_x \\ m(\underline{V}) &= -iqB(iV_y + V_x) \\ m(\dot{\underline{V}}) &= -iqB(\underline{V}) \end{aligned}$$

$$m(\dot{\underline{V}}) + iqB(\underline{V}) = 0 \tag{5.1}$$

(5.1) est une EQD du premier ordre linéaire à coeff constant en $\underline{V}$.

On cherche des solutions de la forme $\underline{V} = \underline{C}e^{rt}$

L'équation caractéristique donne $r = \frac{-iqB}{m}$, ou en posant ω_c × $= \frac{qB}{m}$, $r = -i\omega_c$ et $\underline{V} = \underline{C}e^{-i\omega_c t}$

> **× Difficulté**
> C'est la pulsation cylotron, en radian/s

On utilise les conditions initiales : $\overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{e_x}$, donc $\underline{V}(t=0) = V_x(0) + iV_y(0) = V_0$,

D'où $\underline{V}(t=0) = \underline{C}e^0 = \underline{C} = V_0$.

Donc $\underline{V}(t) = V_0 e^{-i\omega_c t} = V_0(\cos(\omega_c t) - i\sin(\omega_c t))$. [i]

> **Info**
> On écrit le nombre complexe sous forme trigonométrique, pour ensuite mieux séparer partie réelle et partie imaginaire.

Donc $V_x(t) = Re(\underline{V}) = V_0\cos(\omega_c t)$ et $V_y(t) = Im(\underline{V}) = -V_0\sin(\omega_c t)$

On remarque que la vitesse reste constante et le mouvement est uniforme car $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V_0$.

On détermine la trajectoire : on intègre pour obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

$$\begin{cases} x = \frac{V_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + A \\ y = \frac{V_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{V_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y = \frac{V_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \frac{V_0}{\omega_c} \end{cases}$$

La particule est initialement en O, donc $A = 0$ et $B = \frac{-V_0}{\omega_c}$.

Période de la fonction

On prend l'expression la plus simple : $x(t)$ Période de $x(t)$: $\sin(w_c(t+T)) = \sin(w_c t + w_c T) = \sin(w_c t)$. Donc $\omega_c T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2m\pi}{|q|B}$.

Astuce
Le but est de trouver la valeur $\omega_c T$ telle que l'égalité est vérifiée. Comme on sait que $\sin$ est 2π périodique, on en déduit que $\omega_c T = 2\pi$

Détermination de l'équation cartésienne

1. Dans l'expression de y, on passe $-\frac{V_0}{\omega_c}$ dans l'autre membre.
2. On élève au carré les expressions de y et x
3. On somme y et x
4. On utilise la formule : $\cos^2 + \sin^2 = 1$

Info
Le but est d'isoler les cosinus et sinus dans chaque membre

$$\begin{cases} x^2 = (\frac{V_0}{\omega_c})^2\sin^2(\omega_c t) \\ (y + \frac{V_0}{\omega_c})^2 = (\frac{V_0}{\omega_c})^2\cos^2(\omega_c t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y + \frac{V_0}{\omega_c})^2 = (\frac{V_0}{\omega_c})^2(\cos^2(\omega_c t) + \sin^2(\omega_c t)) = (\frac{V_0}{\omega_c})^2 \\ (y + \frac{V_0}{\omega_c})^2 = (\frac{V_0}{\omega_c})^2\cos^2(\omega_c t) \end{cases}$$

On trouve l'équation d'un cercle, de la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

C'est donc une trajectoire circulaire de centre $0, -\frac{V_0}{\omega_c}$ et de rayon $\frac{V_0}{|\omega_c|}$

Représentation de la trajectoire