6

Chapitre

# Oscillateurs

## 6.1 Ressort

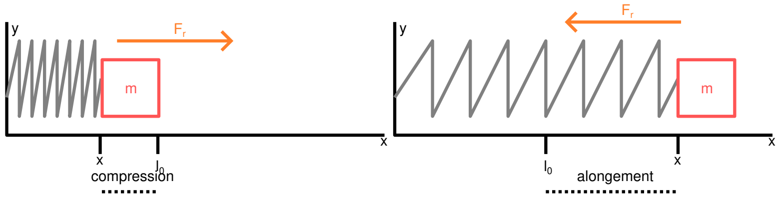
### 6.1.1 Ressort

**Théorème 1.1 :** Force de rappel d'un ressort

$$-\overrightarrow{F_r} = k(x - l_0)\overrightarrow{e_x}$$

avec $l_0$ la longueur à vide et $k$ la constante de raideur

Souvent, on prend pour origine du repère la longueur à vide du ressort. Dans ce cas, l'allongement du ressort vaut $x$.




## 6.2 Oscillateur harmonique (OH)

On appelle *ocillateur harmonique* un système qui répond à l'EQD suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Elle est du second ordre linéaire à coefficient constant sans terme du premier ordre. i

i Info
Conditions nécéssaires : Si le coefficient du terme du second ordre est égal à 1, le coefficient du terme d'ordre 0 est positif

Exemple : $\ddot{x} + 4x = 0$ est un OH mais pas $\ddot{x} - x = 0$

## 6.2.1 Résolution

On cherche des solutions de la forme

$$x = Ce^{rt} \tag{6.1}$$
$$\dot{x} = Cre^{rt}$$
$$\ddot{x} = Cr^2e^{rt}$$

On injecte (6.1) dans l'EQD pour obtenir l'équation caractéristique

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$
$$\iff r^2 = -\omega_0^2$$
$$\iff r = \pm i\omega_0$$

La solution est complexe et peut s'écrire sous 3 formes :

**Théorème 2.1 :** Solutions d'un OH

- $x(t) = \underline{C_1}e^{-i\omega_0 t} + \underline{C_2}e^{+i\omega_0 t}$
- $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
- $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$ou $x(t) = D\sin(\omega_0 t + \eta$

Chacune des solutions fait intervenir 2 constantes d'intégration que l'on détermine en appliquant les conditions initiales sur $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

**Exemple du ressort**

La solution de l'EQD est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Si à $t = 0$, on allonge le ressort sur uns distance $x(0) = x_m$ et on étudie le mouvement sans vitesse initiale ($\dot{x}(0) = 0$).

$x(0) = x_m = A \times 1$.

Il faut calculer $\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\sin(\omega_0 t)$, donc $\dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$ car pas de vitesse initiale, donc $B = 0$

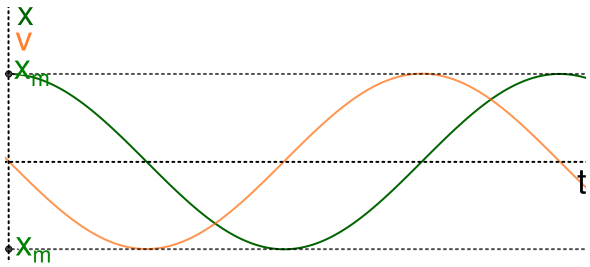
On obtient alors $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)$.

### Période T des oscillations

**Théorème 2.2 :** Période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

## Représentation graphique

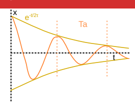
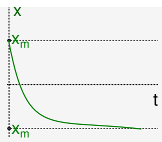
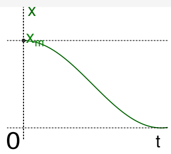



Quand l'amplitude des oscillations est maximale, la vitesse est nulle et quand $x$ est nul, la vitesse est maximale.[i]

**i Info**
Vitesse et position sont dits en quadrature de phase.

# 6.3 Oscillateurs amortis

## 6.3.1 En résumé (par coeur)

| Régime | $\Delta$ | $Q = \omega_0 \tau$ | Représentation | Solution |
|---|---|---|---|---|
| Pseudo-périodique | $< 0$ | $> 1/2$ |  | $x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t))$ avec $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ |
| Critique | $= 0$ | $= 1/2$ |  | $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{1}{2\tau}t}$ |
| Apériodique | $> 0$ | $< 1/2$ |  | $x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(C_1 e^{-\beta t} + C_2 e^{+\beta t})$ avec $\beta = \omega_0\sqrt{-1 + \frac{1}{4Q^2}}$ |

## 6.3.2 Mise en équation

On revient au cas du ressort étiré et on considère en plus une force de frottement fluide $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$. On a toujours, à $t = 0$, $x(0) = x_m$ et $\dot{x}(0) = 0$

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{R}, \vec{F_r}, \vec{F_f}$.

On applique le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_f}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = 0 + 0 - kx - \alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} & = -mg + R + 0 - \alpha\dot{y} \end{cases}$$

Pas de mouvement selon $y$, donc $y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = -kx - \alpha\dot{x} \\ 0 & = -mg + R + 0 \Rightarrow R = mg \end{cases} \tag{6.2}$$

On remarque que les forces de frottement ajoutent un terme du premier ordre. On obtient de (6.2) l'EQD

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{6.3}$$

On peut écrire (6.3) sous forme canonique, avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.4}$$

## 6.3.3 Résolution

(6.4) est homogène, on cherche des solutions sous la forme $Ce^{rt}$

L'équation caractéristique de (6.4) est :

$$r^2 + \frac{1}{\tau}r + \omega_0^2 = 0 \tag{6.5}$$

(6.5) est du second degré dont on calcule le discriminant !

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2}(1 - 4\omega_0^2\tau^2) \tag{6.6}$$

Cela fait intervenir la grandeur $Q = \omega_0\tau$ appelé *facteur de qualité*, sans dimensions.

### Temps

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ avec $T$ la période de l'OH, en l'absence de frottement

$\tau$ est le temps caractéristique sur lequel les frottements opèrent.

$Q = \omega_0\tau = 2\pi\frac{\tau}{T}$

Si $Q >> 1$, les frottements n'ont pas le temps d'agir pendant une période d'oscillation : on se rapproche de l'OH, car $\tau >> T$

Si $Q << 1 \iff \tau << T$, on s'attend à ce que les frottements empêchent les oscillations.