Chapitre

8

Puissance, travail et énergie

8.1 Puissance d'une force

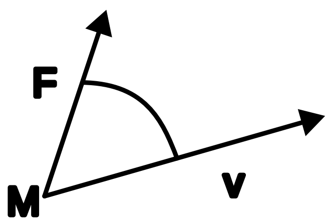
8.1.1 Définition

Théorème 1.1 : Définition d'une force

La puissance de $\overrightarrow{F}$ est donnée par $P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$ et s'exprime en Watt ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$). Elle dépend du référentiel d'étude.

La puissance est positive si $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On dit que la force est motrice au temps où la puissance est calculée. ×

La puissance est négative si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. On dit que la force est résistante au temps où la puissance est calculée.



8.1.2 Théorème de la puissance cinétique

Théorème 1.2 : Théorème de la puissance cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique vaut la somme des puissances des forces exercées sur le système.

$$\dot{E}_c = \sum_i P(\overrightarrow{F_i})$$

Exemple sur le pendule

On fait un bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{T} = & -T\vec{e_\rho} \\ \vec{P} = & -mg\sin\varphi\vec{e_\varphi} \end{cases}$$

$P(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = (-T\vec{e_\rho}) \cdot (l\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) = 0$ car $\vec{T} \perp \vec{v}$

$P(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = -mgl\sin(\varphi) \times \dot{\varphi}$.

On applique le TPC :

$$\dot{E}_c = P(\vec{P}) + P(\vec{T})$$
$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l^2\dot{\varphi}^2 = -mgl\sin(\varphi) \times \dot{\varphi}$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l\dot{\varphi} = -g\sin(\varphi)$$
$$l\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi) = 0$$

En faisant l'approximation des petits angles, on retrouve l'EQD trouvée avec l'analyse classique (PFD).

Astuce
On rappelle que l'expression de la vitesse en coordonnées polaire avec un rayon constant est $\rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

Info
On perd l'information sur les forces qui sont perpendiculaires au déplacement mais on gagne en simplicité. Un raisonnement énergétique peut donc simplifier les choses.

8.2 Travail et Théorème de l'énergie cinétique

8.2.1 Travail d'une force

Soit un système se déplaçant de A vers B suivant un chemin $C(AB)$. On veut connaitre le travail d'une force $\vec{F}$ lors de ce déplacement. On décompose le chemin en déplacements élémentaires $\mathrm{d}\vec{r}$ et on introduit le travail élémentaire δW, avec $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

On a alors le travail de la force F sur le chemin $C(AB)$

$$W_{C(AB)}(\vec{F}) = \int_{C(AB)} \delta W = \int_{C(AB)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{8.1}$$

Info
On l'écrit δW et non $\mathrm{d}W$, car généralement, ce n'est pas la différentielle d'une fonction W car cela signifirait que $\in_A^B \mathrm{d}f = f(B) - F(A)$ et donc que W ne dépend que des points et non du chemin.

Astuce
En effet, $\vec{F}$ est considérée comme constante sur ce petit déplacement.

Info
Aussi appelé circulation du vecteur $\vec{F}$ sur le chemin $C(AB)$

Propriétés

- On peut séparer le chemin en morceau, puis sommer les travaux
- Si on parcourt le chemin dans l'autre sens, le travail sera opposé.
- Généralement, la circulation dépend du chemin emprunté entre les 2 points.
- Si $W > 0$, la force est dite motrice, dans le cas contraire elle est négative, si $W = 0$, la force ne travaille pas.

Déplacement élémentaire

On a $\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \iff \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v} \times \mathrm{d}t$.

En cartésien à 3D : $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$

En cylindrique : $\mathrm{d}\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$.

8.2.2 Calcul du travail d'une force

Forces ⊥ au mouvement

Elles ne fournissent aucun travail.

Cas d'une force constante

On a $W_{C(AB)}(\overrightarrow{F}) = \int_{C(AB)} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F} \cdot \int_{C(AB)} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. ×

× **Difficulté**
En effet, la somme de tous les *vecteurs* petits déplacement élémentaires donne $\overrightarrow{AB}$. Ce n'est pas la somme de la quantité scalaire mais bien la somme des vecteurs car la somme des quantités $\mathrm{d}t$ donne la longueur du chemin parcourue !

Forces non constantes

Voir fiche de méthodologie pour plus d'exemples.

8.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème 2.1 : Énoncé

$$\Delta_{AB} E_c = \sum_i W_{C,AB}(\overrightarrow{F_i})$$

8.3 Énergie potentielle et forces conservatives

8.3.1 Notion de forces conservatives

Force conservative

Définition 3.1 : Définition 1

Une force $\vec{F}$ est dite conservative s'il existe une fonction $u(\vec{r})$ de l'espace tel que le travail élémentaire $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ soit égal à $\delta W = -\mathrm{d}u$.

Définition 3.2 : Définition 2

Une force est conservative $\iff$ le travail de $\vec{F}$ dans le déplacement de A vers B ne dépend pas du chemin pris.

Définition 3.3 : Définition 3

$\vec{F}$ est conservative $\iff$ le travail sur tout chemin fermé est nul (le point de départ = point d'arrivée).

8.3.2 Énergie potentielle

Définition 3.4 : Énergie potentielle

Si une force $\vec{F}$ est conservative, il existe une fonction u telle que $\delta W(\vec{F}) = -\mathrm{d}u$. On appelle u énergie potentielle, notée E_{P_F}.

Ainsi, $W(\vec{F}) = \int \delta W = -\int dE_p = -E_p(B) - E_p(A)$. La variation d'énergie potentielle sur AB vaut l'opposé du travail ✕ , autrement dit 💡 :

$$\Delta_{AB} E_p = -W_{C,AB}(\vec{F})$$

Méthode

Voir fiche de méthodologie

8.3.3 Opérateur gradient

Le vecteur gradient en cartésien est : i

$$\mathrm{grad}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

✕ **Difficulté**
Le travail étant le résultat d'une intégrale, l'énergie potentielle est définit à une constante près. Il faut donc se fixer un point de référence où elle est nulle.

💡 **Astuce**
On peut dire aussi ΔE_p vaut le travail qu'un utilisateur doit fournit pour amener le système du point A au point B.

i **Info**
L'expression du gradient dépend du système de coordonnées dans lequel on se trouve

Propriétés

- Il est linéaire
- Il est dirigé dans le sens des u croissants, c'est à dire pour maximiser l'augmentation de u.
- Il est orthogonal aux équipotentielles de u, surfaces sur lesquelles u est constant.

8.3.4 Calcul de E_p avec le gradient

Définition 3.5 : Définition 4 d'une force conservative

Une force $\overrightarrow{F}$ est conservative $\iff$ il existe une fonction E_p telle que $\overrightarrow{F} = -\operatorname{grad}(E_p)$. On dit que $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle.

8.3.5 Calcul de E_p pour des forces conservative

Force	Expression	Énergie potentielle
Force de rappel	$\overrightarrow{F_r} = -kx\overrightarrow{e_x}$	$\frac{kx^2}{2}$
Force de gravitation	$\overrightarrow{F_g} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$	$E_p = -GmM\frac{1}{r}$
Force électrostatique	$\overrightarrow{F_e} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 \times r^2}$	$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qq_0}{r}$

Ces expressions peuvent être différentes selon les axes et bases utilisés.

8.4 Énergie mécanique

8.4.1 Théorème de l'énergie mécanique

Théorème 4.1 :

La variation de l'énergie mécanique correspond à la somme des travaux des forces non conservatives, qui dissipent de l'énergie, comme les frottements.

$$\Delta_{AB}E_m = \Delta_{AB}E_c + \sum_i \Delta_{AB}E_{p,i} = \sum_i W_{C,AB}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Sans forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve.

> **Astuce**
> Si les forces conservatives en présence ont des E_p connues, on utilise plutôt ce théorème.

8.4.2 Théorème de la puissance mécanique

Théorème 4.2 : TPM

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum_j P(\overrightarrow{F_{NC,j}})$$

8.5 Interprétation graphique de l'énergie potentielle

On s'intéresse à des systèmes dont le mouvement possède un seul degré de liberté. et conservatif. On considère E_p la somme de toutes les énergies potentielles. On note $\vec{F}$ la résultante des forces. E_p correspond donc à l'énergie potentielle associée à $\vec{F}$.

> **Astuce**
> Un seul paramètre décrit le mouvement (cas d'un mouvement rectiligne par exemple, mouvement circulaire à rayon constant)

Il y a un seul degré de liberté : $\vec{F}(x) = F(x)\vec{e_x}$. On peut écrire $\vec{F} = -\operatorname{grad}(E_p) \Rightarrow F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.

On peut alors interpréter le graphique E_p en fonction de x.

Position d'équilibre

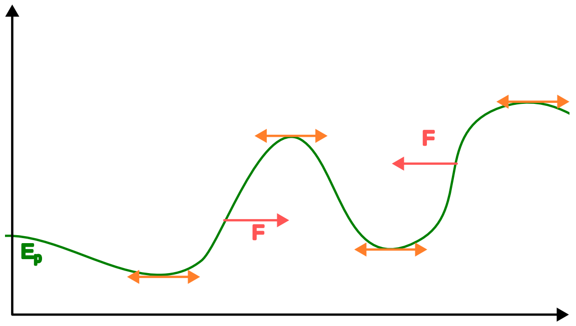
L'accélération est nulle, donc $\vec{F} = \vec{0} \iff -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$, donc les positions d'équilibre correspondent aux points où la courbe $E_p(x)$ admet une tangente horizontale.

> **Astuce**
> Cela peut se produire aux extremum locaux, mais aussi aux points d'inflexion.

Signe de la dérivée

Si $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} > 0, F(x) < 0$ (E_p croissante)

Si $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} < 0, F(x) > 0$



8.5.1 Stabilité des positions d'équilibre

Définition 5.1

Une position d'équilibre est stable si les forces en présence tendent le système à s'y ramener.

Condition pour qu'une position d'quilibre soit table

Soit x_0 une positon d'équilibre, $F(x) = 0 \iff -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$ ×

Pour qu'une position soit stable, il faut que $F(x_0 + \mathrm{d}x) < 0$ quand $x > 0$ ou $F(x_0 + \mathrm{d}x) > 0$ quand $x < 0$

On réécrit la première égalité :

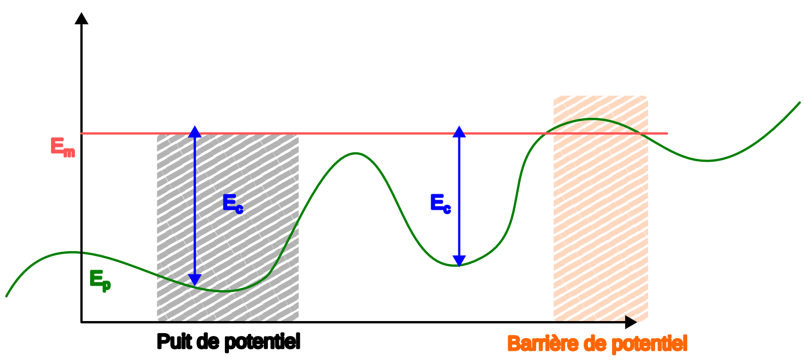
$$\frac{F(x_0 + \mathrm{d}x) - F(x_0)}{\mathrm{d}x} < 0$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_0) < 0 \iff -\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

Il faut donc que la courbe soit convexe en x_0

En ajoutant l'information de l'E_m, on peut connaître l'évolution du système. On peut se représenter des puits i et barrières de potentiel i



× **Difficulté**

Il s'agit bien de la dérivée en fonction de x en non la dérivée temporelle

i **Info**

Un puits d'énergie potentielle existe lorsque la représentation graphique de l'énergie potentielle en fonction du paramètre décrivant le mouvement admet un puits. Si le système n'a pas assez d'énergie mécanique pour sortir du puits, il est contraint de rester entre deux positions et peut éventuellement osciller.

i **Info**

Une barrière d'énergie potentielle existe lorsque le système ne peut alors pas aller au-delà de cette position, faute d'énergie suffisante et est contraint de revenir en arrière.