Chapitre 1

Dérivée et intégrales

1.1 Dérivées

Fonction	Dérivée
Dérivée de x^n	nx^{n-1}
Dérivée de $\sqrt{x}$	$0,5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Dérivée de $\frac{1}{x^n}$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
Dérivée de e^x	e^x
Dérivée de ku	ku'
Dérivée de $u+v$	$u'+v'$
Dérivée de uv	$u'v+uv'$
Dérivée de $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-vu'}{v^2}$
Dérivée de $\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
Dérivée de u^2	$2u'u$
Dérivée de $\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de $\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
Dérivée de e^u	$u'e^u$
Dérivée de u^n	$nu'u^{n-1}$
Dérivée de $(g \circ f(x))'$	$f'(x) \times g'(f(x))$
Dérivée de $\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
Dérivée de $\sin(u)$	$u\cos(u)$
Dérivée de $\cos(u)$	$-u\sin(u)$
Dérivée de $\sinh(u)$	$u\cosh(u)$
Dérivée de $\cosh(u)$	$u\sinh(u)$

Équation de tangente

> Équation de la tangente de la courbe de f au point a : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

1.2 Intégrales

1.2.1 Primitives

Fonction	Primitive
Primitive de a	ax+k
Primitive de x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$
Primitive de $\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
Primitive de $\frac{a}{x}$	$a\ln x+k$
Primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
Primitive de $\cos x$	$\sin x+k$
Primitive de $\sin x$	$-\cos x+k$
Primitive de e^x	e^x+k
Primitive de $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$
Primitive de $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{u^{n-1}}+k$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$
Primitive de $u'\cos u$	$\sin u+k$
Primitive de $u'\sin u$	$-\cos u+k$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\ln u+k$
Primitive de $u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}(u)^{3/2}+k$
Primitive de $u'e^u$	e^u
Primitive de $u'\cosh u$	$\sinh u$
Primitive de $u'\sinh u$	$\cosh u$

1.2.2 Intégration par parties

Théorème 2.1 : Formule

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Exemple : Double intégration par parties

On doit calculer

$$\int^x e^{at}\sin(t)dt$$

On va donc faire 2 intégrations par parties successives, en choisissant la fonction trigonométrique comme étant v' dans les 2 cas :

$$\begin{aligned}\int^x e^{at}\sin(t)dt = [-e^{at}\cos(t)]^x - a\int^x -e^{at}\cos(t)\\ + a\int^x e^{at}\cos(t)\\ + a([e^{at}\sin(t)]^x - a\int^x e^{at}\sin(t))\\ + a[e^{at}\sin(t)]^x - a^2\int^x e^{at}\sin(t)\end{aligned}$$

On remarque que l'intégrale à calculer se trouve dans les 2 membres, on obtient donc :

$$\begin{aligned}(1-a^2)\int^x e^{at}\sin(t)dt &= [-e^{at}\cos(t)]^x + a[e^{at}\sin(t)]^x\\ &= [e^{at}(-\cos(t)+a\sin(t))]^x\\ \int^x e^{at}\sin(t)dt &= \frac{[e^{at}(-\cos(t)+a\sin(t))]^x}{(1-a^2)} \qquad = \frac{e^{ax}(-\cos(x)+a\sin(x))}{(1-a^2)}\end{aligned}$$

1.2.3 Intégration par changement de variable

Le but est de simplifier une intégrale en lui attribuant une nouvelle variable intelligemment choisie.

1. On définie une nouvelle variable de la forme $t = \varphi(x)$
2. $dt = \varphi(x)'dx \iff dx = \frac{dt}{\varphi(x)'}$
3. On remplace dans l'intégrale $\varphi(x)$ par t et dx par l'expression calculée à l'étape précédente
4. On applique la fonction φ aux bornes de l'intervalle
5. On peut simplifier l'expression de l'intégrale et la calculer entre les nouvelles bornes

Exemple

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{(x\ln(x)-x)^{1/3}}$$

On remarque $(x\ln(x)-x)' = \ln(x)$, qui se trouve au numérateur.

1. On pose : $t = x\ln(x) - x$
2. $dt = \ln(x)dx \iff dx = \frac{dt}{\ln(x)}$
3. On remplace dans l'intégrale $x\ln(x)-x$ par t et dx par l'expression calculée à l'étape précédente : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{(t)^{1/3}}\frac{dt}{\ln(x)}$
4. On applique $x\ln(x)-x$ aux bornes de l'intervalle :
   - Pour e : $e\ln(e) - e = 0$
   - Pour 1 : $1 \times \ln(1) - 1 = -1$

   On obtient : $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\ln(x)}{(t)^{1/3}}\frac{dt}{\ln(x)}$
5. On simplifie : $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{(t)^{1/3}}$

On n'a plus qu'à utiliser la formule de la primitive de $\frac{1}{x^n}$, c'est à dire : $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$