Chapitre

4

Vecteurs de l'espace

4.1 Opérations sur les vecteurs

4.1.1 Produit scalaire

Théorème 1.1 : Définition du produit scalaire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\\ &= ||\overrightarrow{A}|| \times ||\overrightarrow{B}|| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}})\end{aligned}$$

4.1.2 Produit vectoriel

Théorème 1.2 : Définition

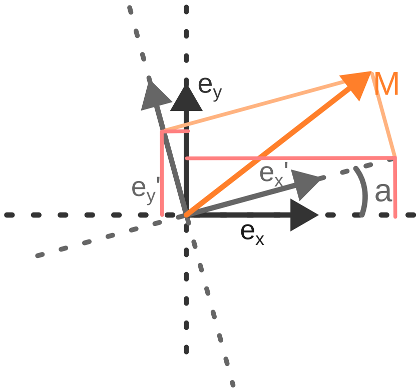
Le produit vaut $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_yv_z - u_zv_y \\ u_zv_x - u_xv_z \\ u_xv_y - u_yv_x \end{pmatrix}$

Théorème 1.3 : Norme

La norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ vaut $||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})|$. Cependant, on peut aussi la calculer avec la méthode classique en connaissant les composantes ($\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

4.2 Rotation d'une base orthonormée

On considère le schéma suivant :



Alors, on peut exprimer les vecteurs $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ dans la base $\vec{e_x'}$ et $\vec{e_y'}$:

$$\vec{e_x} = \cos(\alpha)\vec{e_x'} - \sin(\alpha)\vec{e_y'} \qquad \vec{e_y} = \sin(\alpha)\vec{e_x'} + \cos(\alpha)\vec{e_y'}$$

De la même façon, on peut exprimer les vecteurs $\vec{e_x'}$ et $\vec{e_y'}$ dans la base $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$:

$$\vec{e_x'} = \cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y} \qquad \vec{e_y'} = -\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}$$

On veut maintenant exprimer les composantes de M dans le repère R' en fonction des composantes de M dans R en projetant x' et y' dans le repère R (projections rouges) :

$$x' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \qquad y' = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y$$

4.3 Méthode

4.3.1 Déterminer un vecteur directeur de même direction qu'un autre vecteur

On veut déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$, de même direction que $\overrightarrow{AB}$. Pour trouver $\vec{u}$, il faut diviser les composante de $\overrightarrow{AB}$ par $||\overrightarrow{AB}||$:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$$

4.3.2 Utiliser le projeté orthogonal avec le produit scalaire

Soit $\overrightarrow{AH}$, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \cos(\alpha) \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} ||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}|| \cos(\alpha) \\
&= \frac{||\overrightarrow{AH}||}{\cos(\alpha)} ||\overrightarrow{AB}|| \cos(\alpha) \\
&= ||\overrightarrow{AH}|| \times ||\overrightarrow{AB}||
\end{aligned}$$

4.3.3 Exprimer 2 vecteurs de même direction l'un en fonction de l'autre

Soit $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ deux vecteurs. On cherche x dans $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ Donc $x = \frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.

4.3.4 Déterminer la valeur de l'angle entre 2 vecteurs avec le produit vectoriel

En connaissant les coordonnées des 2 vecteurs u et v, on peut trouver leur produit vectoriel, ici noté $\overrightarrow{w}$.

On peut calculer la norme avec la formule $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Le sinus de l'angle recherché vaut alors :

$$\frac{||\overrightarrow{w}||}{||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||}$$

En faisant le rapport, on trouve le sinus de l'angle, puis en appliquant $\sin^{-1}$ au rapport, l'angle, noté α. Cependant, la valeur de α peut aussi être : $\pi - \alpha, -\alpha, \alpha - \pi$.

4.4 Formules trigonométriques

4.4.1 Équivalences

- $\cos(-a) = \cos(a)$
- $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$
- $\sin(-a) = -\sin(a)$
- $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$

4.4.2 Sommes

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos(a) - 1 = 1 - 2\sin(a)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

4.4.3 Linéarisation

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$