Chapitre 6

Nombres complexes

Fiche de révision

Cette fiche ne couvre que les nouevelles propriétés vues dans l'UE. Pour une vision globale des nombres complexes, se reporter aux fiches de révision "Nombres complexes - Partie algébrique" et "Nombres complexes - Partie géométrique" dans la rubrique Mathématiques Exp. du niveau Terminale.

6.1 Passer d'une forme à une autre

6.1.1 Mettre sous forme trigonométrique

1. On calcule le module avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. On cherche le cosinus de l'angle avec $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$
3. On cherche le sinus de l'angle avec $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$
4. On cherche à quel angle correspond la combinaison de $\cos$ et $\sin$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5. On n'a plus qu'à écrire : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec les valeurs trouvées

6.1.2 Mettre sous forme exponentielle

1. On écrit le nombre sous sa forme trigonométrique
2. On transforme l'écriture en remplaçant $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ par $e^{i\theta}$.

6.2 Propriétés de l'argument et du module

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

6.3 Représentation complexe des signaux sinusoidaux

6.3.1 Écrire un signal sous la forme générique

On se sert des propriétés des fonctions trigonométriques pour n'avoir plus qu'un signal de la forme $A\cos(wt+\varphi)$, avec $A > 0$

Exemple : $s(t) = -2\cos(wt+\frac{\pi}{4}) = 2\cos(wt+\frac{\pi}{4}+\pi) = 2\cos(wt+\frac{5\pi}{4})$.

Exemple : $s(t) = \cos(wt)+\sqrt{3}\sin(wt) = A\cos(wt+\varphi) = A(\cos(wt)\cos(\varphi) - \sin(wt)\sin(\varphi))$

> **Astuce**
> On se sert de la formule de duplication : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

On procède ensuite par identification :

$$\begin{cases} A(\cos(wt)\cos(\varphi)) & = \cos(wt) \\ -A(\sin(wt)\sin(\varphi)) & = \sqrt{3}\sin(wt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\cos(\varphi)) & = 1 \\ -A(\sin(\varphi)) & = \sqrt{3} \end{cases}$$

On met au carré :

$$\begin{cases} A^2(\cos(\varphi)^2) & = 1 \\ A^2(\sin(\varphi)^2) & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) & = 4 \Rightarrow A = 2 \\ A^2(\sin(\varphi)^2) & = 3 \end{cases}$$

De A, on peut déduire φ avec son $\sin$ et $\cos$.

6.3.2 Déterminer la forme complexe

À partir de la forme générique, on donne la forme exponentielle complexe : $s(t) = A\cos(wt+\varphi) \iff s'(t) = Ae^{i(wt+\varphi)} = Ae^{i\varphi}e^{iwt} = A'e^{iwt}$, avec $A' = Ae^{i\varphi}$.