Chapitre 7

Différentielles

7.1 Dérivées partielles

7.1.1 Définition

Quand une fonction possède plusieurs variable, on ne peut la dérivée de la manière habituelle. C'est pourquoi on choisit quelle variable on considère pour la dérivée. On considère alors les autres comme des constantes.

On note :$(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})_y$. On note la fonction précédée du signe de la dérivée partielle au numérateur et la variable que l'on considère au dénominateur. On note en indice les variables que l'on considère comme constante.

7.1.2 Théorème de Scharwz

Si les fonction dérivées sont continues, et que l'on dérive 2 fois en changeant de variable, l'ordre n'a pas d'influence sur le résultat final.

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

7.1.3 Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Pour obtenir la différentielle d'une fonction de plusieurs variable, on fait la dérivée partielle en fonction de chaque variable puis on les sommes de la façon suivante :

Pour une fonction dépendant de i variables n, on a :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial n_1}\mathrm{d}n_1 + \frac{\partial f}{\partial n_2}\mathrm{d}n_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial n_i}\mathrm{d}n_i$$

.

7.2 Différentielle Totale Exacte

Soit ω la forme différentielle $A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y$. Il est très rare qu'il existe une fonction dont la forme différentielle est ω, i.e. $\omega = \mathrm{d}f(x,y)$. Si c'est le cas, on dit que ω est une différentielle totale exacte (DTE).

Pour que ω soit une DTE, c'est à dire pour qu'il existe une fonction telle que $\omega = A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x,y)$, il faut que la relation de Cauchy soit vérifiée :

$$(\frac{\partial A}{\partial y})_x = (\frac{\partial B}{\partial x})_y$$

7.2.1 Montrer que ω est une DTE

On calcule $(\dfrac{\partial A}{\partial y})_x$ et $(\dfrac{\partial B}{\partial x})_y$. Si le résultat est le même, ω est une DTE et on peut dès lors trouver la fonction f dont elle est la DTE.

7.2.2 Déterminer la fonction dont ω est une DTE

Introduction

Comme ω est une DTE, il existe une fonction f telle que $\mathrm{d}f(x,y) = A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y$.

Mais on aussi vu en 7.1.3 que $\mathrm{d}f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x})_y\mathrm{d}x + (\frac{\partial f}{\partial y})_x\mathrm{d}y$

On en déduit que $(\frac{\partial f}{\partial x})_y = A(x,y)$ et $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = B(x,y)$.

Méthode pour déterminer f.

1. Prenons $A(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x})_y$. Pour obtenir l'expression de f, on intègre en fonction de x et en gardant y constant [i] . Comme dans toutes intégrations, on obtient l'expression de $f(x,y)$ à une constante près, que l'on note C_y. On a donc : $f(x,y) = \cdots + C_y$.

   Les prochaines étapes permettent de déterminer l'expression de C_y.
2. Faisons maintenant la dérivée partielle de $f(x,y)$ en fonction de y : $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$. On obtient une expression de la forme : $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = \cdots + C'_y$

i Info
En effet, on part de la dérivée partielle de f en fonction de x. L'opération inverse est donc l'intégration en fonction de x avec y constant.

avec C'_y la dérivée de la constante C_y obtenue lors de l'étape précédente.

3. On sait que $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = B(x, y)$. Donc l'expression précédente doit être égale à $B(x, y)$. En les comparant, on peut déduire l'expression de C'_y
4. On intègre C'_y en fonction de y pour trouver C_y

Exemple

Prenons l'exemple précédent, $\omega = 2(x + y)\mathrm{d}x + (2x - 2y + 1)\mathrm{d}y$. On a montré que c'était une DTE et on cherche maintenant la fonction f dont elle est la différentielle.

1. Prenons $2(x+y) = (\frac{\partial f}{\partial x})_y$. On intègre $2(x+y)$ par rapport à x et on trouve que $f(x) = 2\frac{x^2}{2} + 2xy + C_y = x^2 + 2xy + C_y$. On veut maintenant déterminer C_y.
2. Faisons maintenant la dérivée partielle de $f(x, y)$ en fonction de y : $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = 2x + C'_y$.
3. On compare avec $(2x - 2y + 1)$ pour trouver C'_y :
   $2x + C'_y = 2x - 2y + 1 \Rightarrow C'_y = -2y + 1$.
4. On intègre C'_y pour obtenir $C_y = -y^2 + y$

Donc $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + y$.

7.3 Équations différentielles à variables séparables

Si l'EQD n'est pas à coefficients constants, on ne peut pas utiliser les méthodes classiques vues au chapitre 4.

Pour les résoudre, on sépare ce qui dépend de x et ce qui dépend de la fonction f recherchée (bien qu'elle dépende aussi de x). Le but est d'avoir $\mathrm{d}x$ dans chaque membre pour ensuite intégrer. Pour cela, on peut utiliser la relation :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

Exemples

On a l'EQD : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - xf = 0$ On remarque que f n'est pas à coefficient constant puisqu'il s'agit de x. On va donc séparer x et f et faire apparaître $\mathrm{d}x$ dans chaque membres.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - xf &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= xf \\
\frac{\mathrm{d}f}{f} &= x\mathrm{d}x \\
\frac{\mathrm{d}f'}{f}\mathrm{d}x &= x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On fait apparaître $\mathrm{d}x$ avec la relation.

Maintenant que l'on a séparé x et f et fait apparaître $\mathrm{d}x$, on peut intégrer :

$$\begin{aligned}
\frac{f'}{f}\mathrm{d}x &= x\mathrm{d}x \\
\int \frac{f'}{f}\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}x \\
\ln(f) + C_1 &= \frac{x^2}{2} + C_2 \\
\ln(f) &= \frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 \\
f &= e^{\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1} \\
f &= e^{\frac{x^2}{2} + C} \\
f &= e^{\frac{x^2}{2}} e^{C} \\
f &= K e^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

On a donc bien trouvé l'expression de f. Pour avoir la valeur de K, il faudrait avoir des conditions initiales.