Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Exercice 1

Pour que cet ensemble soit un espace vectoriel, il doit satisfaire les 8 axiomes. L'un des axiomes de la multiplication par un scalaire est que $1 \cdot v = v$ pour tout vecteur v. Dans ce cas, pour un vecteur $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 0) = (x_1, 0)$$

Pour que cet axiome soit satisfait, il faudrait que $(x_1, 0) = (x_1, x_2)$ pour tous les vecteurs $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. C'est faux, par exemple pour le vecteur $(1, 1)$, on a $1 \cdot (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$. Puisque cet axiome n'est pas satisfait, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec ces opérations **n'est pas un espace vectoriel**.

1.1.2 Exercice 2

On vérifie les axiomes d'un espace vectoriel :

1. **Commutativité de l'addition :** $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$. L'axiome est vérifié.
2. **Associativité de l'addition :** $(x \oplus y) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (y \oplus z)$. L'axiome est vérifié.
3. **Élément neutre de l'addition :** On cherche $e \in E$ tel que $x \oplus e = x$. Cela donne $xe = x$, donc $e = 1$. L'élément neutre est $1 \in E$.
4. **Inverse de l'addition :** Pour tout $x \in E$, on cherche $y \in E$ tel que $x \oplus y = 1$. Cela donne $xy = 1$, donc $y = \frac{1}{x} \in E$.
5. **Distributivité (scalaire sur addition vectorielle) :** $\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda \otimes (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda$. Et $(\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y) = x^\lambda \oplus y^\lambda = x^\lambda y^\lambda$. Les deux côtés sont égaux.
6. **Distributivité (scalaire sur addition de scalaires) :** $(\lambda + \mu) \otimes x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu$. Et $(\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x) = x^\lambda \oplus x^\mu = x^\lambda x^\mu$. Les deux côtés sont égaux.

7. **Associativité de la multiplication scalaire :** $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = \lambda \otimes (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda}$. Et $(\lambda\mu) \otimes x = x^{\lambda\mu}$. Les deux côtés sont égaux.
8. **Élément neutre de la multiplication scalaire :** $1 \otimes x = x^1 = x$. L'axiome est vérifié.

Tous les axiomes sont satisfaits, donc E est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1.3 Exercice 3

1. $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. En ajoutant l'opposé de $\lambda \cdot 0_E$, on a $0_E = \lambda \cdot 0_E$.
2. $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. En ajoutant l'opposé de $0 \cdot v$, on a $0_E = 0 \cdot v$.
3. $\lambda v + \lambda(-v) = \lambda(v + (-v)) = \lambda \cdot 0_E = 0_E$, donc $\lambda(-v) = -(\lambda v)$. De plus, $\lambda v + (-\lambda)v = (\lambda - \lambda)v = 0 \cdot v = 0_E$, donc $(-\lambda)v = -(\lambda v)$. On a donc $\lambda(-v) = (-\lambda)v = -(\lambda v)$.

Astuce

Pour ce genre de démonstration, quand on ne sait pas par quoi commencer, on écrit que $0_E = 0_E + 0_E$. Cela permet de faire apparaitre un nouvel élément.

1.1.4 Exercice 4

La preuve découle directement de la vérification de chacun des 8 axiomes des espaces vectoriels, en s'appuyant sur le fait que E_1 et E_2 sont eux-mêmes des espaces vectoriels.

1. **Commutativité :** $(u_1, u_2) +_{12} (v_1, v_2) = (u_1 +_1 v_1, u_2 +_2 v_2) = (v_1 +_1 u_1, v_2 +_2 u_2) = (v_1, v_2) +_{12} (u_1, u_2)$.
2. **Associativité :** L'associativité de l'addition dans $E_1 \times E_2$ découle de celle de E_1 et E_2.
3. **Élément neutre :** Le vecteur nul est $(0_{E_1}, 0_{E_2})$.
4. **Inverse :** L'inverse de (u_1, u_2) est $(-u_1, -u_2)$.
5. **Distributivité (scal-vec) :** $\lambda((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = \lambda(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\lambda(u_1+v_1), \lambda(u_2+v_2)) = (\lambda u_1+\lambda v_1, \lambda u_2+\lambda v_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2) + (\lambda v_1, \lambda v_2) = \lambda(u_1, u_2) + \lambda(v_1, v_2)$.
6. **Distributivité (scal-scal) :** $(\lambda+\mu)(u_1, u_2) = ((\lambda+\mu)u_1, (\lambda+\mu)u_2) = (\lambda u_1 + \mu u_1, \lambda u_2 + \mu u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2) + (\mu u_1, \mu u_2) = \lambda(u_1, u_2) + \mu(u_1, u_2)$.
7. **Associativité (mult. scal.) :** $\lambda(\mu(u_1, u_2)) = \lambda(\mu u_1, \mu u_2) = (\lambda(\mu u_1), \lambda(\mu u_2)) = ((\lambda\mu)u_1, (\lambda\mu)u_2) = (\lambda\mu)(u_1, u_2)$.
8. **Élément neutre (mult. scal.) :** $1 \cdot (u_1, u_2) = (1 \cdot_1 u_1, 1 \cdot_2 u_2) = (u_1, u_2)$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Exercice 5

Un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel s'il contient le vecteur nul, est fermé par addition et par multiplication scalaire.

- E_1 : La matrice nulle est dans E_1 (avec $a = b = c = 0$). La somme de deux matrices dans E_1 est aussi dans E_1, et la multiplication par un scalaire préserve la forme. E_1 est un sous-espace vectoriel.
- E_2 : La matrice nulle donne $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice nulle n'est pas dans E_2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
- E_3 : La matrice nulle n'est pas dans E_3 car toutes les matrices de E_3 ont 1 à la position (1,1). E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel.
- E_4 : La matrice nulle est dans E_4.

  Si $A, B \in E_4$, $(A+B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Si $A \in E_4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda A)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  E_4 est un sous-espace vectoriel.

1.2.2 Exercice 6

- E_1 : L'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel.
- E_2 : L'ensemble des fonctions surjectives ne contient pas la fonction nulle. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
- E_3 : L'ensemble des fonctions f telles que $2f(a) = f(b)$ est un sous-espace vectoriel.
- E_4 : L'ensemble des fonctions croissantes ne contient pas le multiple scalaire d'une fonction, car si f est croissante, $-f$ est décroissante. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

1.2.3 Exercice 7

1. Le vecteur nul est dans $F \cap G$. Si $x, y \in F \cap G$, alors $x + y \in F$ et $x+y \in G$, donc $x+y \in F \cap G$. Si $x \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x \in F$ et $\lambda x \in G$.

   Donc $\lambda x \in F \cap G$. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

2. Le vecteur nul est dans $F+G$. Si $u, v \in F+G$, alors $u = x_1+y_1, v = x_2 + y_2$ avec $x_i \in F, y_i \in G$. $u + v = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in F + G$. Si $u \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u = x + y$, $\lambda u = \lambda x + \lambda y \in F + G$.

   Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel.

3. $\Leftarrow$: Si $F \subset H$ et $G \subset H$, alors pour tout $z = x + y \in F + G$, $x \in H$ et $y \in H$, donc $z \in H$.

   $\Rightarrow$: Supposons $F + G \subset H$. Pour tout $x \in F$, $x = x + 0_E \in F + G$, donc $x \in H$. De même, pour tout $y \in G$, $y = 0_E + y \in F + G$, donc $y \in H$ et on a bien $x + y \in H$.

4. $\Leftarrow$: Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ qui est un sous-espace. Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ qui est un sous-espace.

   $\Rightarrow$ **Par l'absurde :** Supposons $F \cup G$ est un sous-espace.

   Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, il existe $u \in F \backslash G$ et $v \in G \backslash F$. Alors $u, v \in F \cup G$, donc $u + v \in F \cup G$.

   Si $u + v \in F$, alors $v = (u + v) - u \in F$ (car $u, u + v \in F$), ce qui est une contradiction. Si $u + v \in G$, alors $u = (u + v) - v \in G$, contradiction.

   L'hypothèse est fausse.

1.3 Familles libres, génératrices. Bases

1.3.1 Exercice 8

1.
   - F_1 : C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il contient le polynôme nul et est stable ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in F_1$, $(\lambda P+Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P' + Q')(0) = \lambda P'(0) + Q'(0) = 0$).
   - F_2 : C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il contient le polynôme nul et est stable ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in F_2$, $(\lambda P+Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$)
   - F_3 : Le polynôme nul n'est pas dans F_3, et la somme de deux polynômes de degré n n'est pas forcément de degré n. F_3 **n'est pas un sous-espace vectoriel**.

2. On a $3X^3 - 2X^2 - 4X = \lambda_1(1) + \lambda_2(X^2 + 2X + 1) + \lambda_3(X^3)$. Par identification, on trouve $\lambda_3 = 3, \lambda_2 = -2, 2\lambda_2 = -4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Le système a une solution unique : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$. On en déduit que bien $P(X)$ **est une combinaison linéaire**.

   Un polynôme $Q(X) = a_0+a_1X+...+a_nX^n$ est dans $Vect(P_1, P_2, P_3)$ si et seulement si il existe des scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$a_0 + a_1X + ... + a_nX^n = \alpha + \beta(X + 1)^2 + \gamma X^3$$

$$a_0 + a_1X + ... + a_nX^n = (\alpha + \beta) + 2\beta X + \beta X^2 + \gamma X^3$$

Par identification des coefficients, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 2\beta \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \gamma \\ a_k = 0 \text{ pour } k > 3 \end{cases}$$

Plus généralement, $Vect(P_1, P_2, P_3)$ est l'ensemble des polynômes de la forme, avec $A, B, V \in \mathbb{R}^3$: $A + 2BX + BX^2 + CX^3$ ✕ .

3. (a) Les degrés sont différents 💡 , la famille est **libre**.
   (b) $\lambda_1(X+1) + \lambda_2(X-1) = 0 \implies (\lambda_1 + \lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. On a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille est **libre**.
   (c) $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$. On a $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = (X^2 - 1) + 2X + 2 = (X^2 - 1) + 2(X+1)$. On obtient $(X^2 - 1) - (X+1)^2 + 2(X+1) = 0$, donc la famille n'est **pas libre**.
4. La famille est **libre**. L'espace engendré est $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n.

> ✕ **Difficulté**
> Ce n'est pas simplement l'ensemble des polynomes de degrés 3

> 💡 **Astuce**
> On parle de famille étagée

1.3.2 Exercice 9

La dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4.

- $\mathcal{F}_1 = (M_1, M_2, M_3)$. 3 vecteurs. La famille est **libre** mais **non génératrice** i . Ce n'est **pas une base**.
- $\mathcal{F}_2 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$. 4 vecteurs. La famille est **libre**, donc elle est **génératrice** ! . C'est une **base**.
- $\mathcal{F}_3 = (M_1, M_2, M_4, M_5)$. 4 vecteurs. $M_5 = 2M_1 + 2M_2 + 2M_4$. Il y a une relation de dépendance. La famille n'est **pas libre**, **non génératrice** et n'est **pas une base**.

> i **Info**
> car elle comporte moins de vecteurs que la dimension de l'espace qu'elle devrait générer.

> ! **Attention**
> On a cette équivalence uniquement parce que nous sommes dans un espace de dimension 4 avec 4 vecteurs dans la matrice.

1.4 Bases et dimension

1.4.1 Exercice 10

1. On peut écrire F comme $F = Vect((1,-1,2),(3,1,3),(-3,-5,0))$, donc F est un sous-espace.

   G est le noyau d'une application linéaire ! , donc c'est un sous-espace.

   H est le sous-espace engendré par un vecteur non nul $(Vect((1,1,1)))$, c'est donc une droite vectorielle.

> ! **Attention**
> Il faudrait encore montrer que les équations forment bien une fonction linéaire.

2. F : Les trois vecteurs sont liés par la relation $(-3,-5,0) = 2(1,-1,2) - (3,1,3)$. Une base de F est $((1,-1,2),(3,1,3))$. $dim(F) = 2$.

   G : Le système est $x - 6y + z = 0$ et $x - 3y = 0$. On peut déduire du système que $x = 3y$ et $z = 3y$. Un vecteur de G est de la forme $(3y, y, 3y) = y(3,1,3)$. Une base est $\{(3,1,3)\}$. $dim(G) = 1$.

   H : Une base est $\{(1,1,1)\}$. $dim(H) = 1$.

3. F :Avec un pivot de Gauss de la matrice augmentée, on parvient à trouver l'équation finale (On fait d'abord $L_2 = L_2 +_L 1, L3 = L_3 - 2L_1$, puis $L_3 = 4L_3 - 3L_2$ L'équation est $-5x + 3y + 4z = 0$.

   G : Les équations sont données : $x - 6y + z = 0$ et $x - 3y = 0$.

   H : Un vecteur (x,y,z) est dans H si $x = y$ et $y = z$. Équations : $x - y = 0$ et $y - z = 0$.

4. $F \cap G$: On substitue les équations de G ($x = 3y, z = 3y$) dans l'équation de F ($5x - 3y - 4z = 0$) : $5(3y) - 3y - 4(3y) = 15y - 3y - 12y = 0$. Cette équation est toujours vraie . Donc $G \subset F$ et $F \cap G = G$.

   $F \cap H$: On substitue les équations de H ($x = y = z$) dans l'équation de F : $5x - 3x - 4x = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0$. Donc $x = y = z = 0$. $F \cap H = \{(0,0,0)\}$.

   $G \cap H$: On substitue les équations de H dans l'équation de G : $x - 3x = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0$. Donc $x = y = z = 0$. $G \cap H = \{(0,0,0)\}$.

Astuce

On aurait pu utiliser le fait q'un vecteur (x,y,z) est dans F (un plan) s'il est orthogonal au produit vectoriel de ses vecteurs de base. $(1,-1,2) \times (3,1,3) = (-5,3,4)$.

Info

Cela signifie que le vecteur directeur de la droite G est dans le plan F

1.4.2 Exercice 11

Soit $\mathcal{B}_{F\cap G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de $F \cap G$.

On la complète en une base de F, $\mathcal{B}_F = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r)$, et en une base de G, $\mathcal{B}_G = (u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_s)$.

On montre que $\mathcal{B}_{F+G} = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s)$ est une base de $F + G$ car $dim(F + G) = p + r + s$.

D'autre part, $dim(F) = p + r$ et $dim(G) = p + s$.

Donc $dim(F) + dim(G) = (p + r) + (p + s) = 2p + r + s$.

Donc $dim(F + G) + dim(F \cap G) = (p + r + s) + p = 2p + r + s$. L'égalité est vérifiée.

1.5 Somme directe, espaces supplémentaires

1.5.1 Exercice 12

Intersection : Si $A \in \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3$, alors $A^T = A$ et $A^T = -A$. Donc $A = -A \implies 2A = 0 \implies A = 0$. Donc $\mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3 = \{0\}$.

Somme : Toute matrice B peut s'écrire, avec $S \in \mathcal{S}_3, A \in \mathcal{A}_3$ $A = \frac{1}{2}(S + S^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ ×, où la première partie est symétrique et la deuxième est antisymétrique. Puisque l'intersection est nulle et que la somme est l'espace entier, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont **supplémentaires**.

× **Difficulté**
Voir cours d'algèbre 1 pour la démonstration de cette expression

Dimensions : $dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$. $dim(\mathcal{S}_3) = 3 + \frac{3 \times 2}{2} = 6$. $dim(\mathcal{A}_3) = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ × . La somme est $6 + 3 = 9$.

× **Difficulté**
En effet, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

alors qu'une matrice symétrique est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Généralisation à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $dim(\mathcal{S}_n) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. $dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$. La somme est n^2.

1.5.2 Exercice 13

1. F est un sous-espace, car la fonction nulle est paire, la somme de deux fonctions paires est paire et le produit par un scalaire d'une fonction paire est paire. Idem pour G.

   Intersection : Si $f \in F \cap G$, alors $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = -f(x)$, ce qui implique $f(x) = 0$ pour tout x.

2. $f_+(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_+(x)$.

   $f_-(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_-(x)$.

   $f_+(x) + f_-(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

3. D'après la question 2, $E = F + G$. D'après la question 1, $F \cap G = \{0_E\}$. Donc $E = F \oplus G$.

1.5.3 Exercice 14

1. $\Rightarrow$: Si $E = H \oplus Vect(v)$, alors l'intersection est $\{0_E\}$. Si $v \in H$, alors $v \in H \cap Vect(v)$, ce qui est une contradiction si $v \neq 0_E$.

   $\Leftarrow$: Si $v \notin H$, alors $H \cap Vect(v) = \{0_E\}$. De plus, $dim(H + Vect(v)) = dim(H) + dim(Vect(v)) - dim(H \cap Vect(v)) = (n - 1) + 1 - 0 = n$. Comme $H + Vect(v)$ est un sous-espace de E de même dimension, $H + Vect(v) = E$.

2. Soit $w \in H$. Pour montrer que $Vect(v + w)$ et H sont supplémentaires, il suffit de montrer que $v + w \notin H$. Supposons $v + w \in H$. Comme $w \in H$ et H est un sous-espace, $-w \in H$.

Alors $v = (v + w) + (-w)$ est dans H, ce qui est une contradiction. Donc $v + w \notin H$.

1.5.4 Exercice 15

- $\Rightarrow$: Si E_1, E_2, E_3 sont en somme directe, la décomposition est unique. Si $v \in E_1 \cap E_2$, alors $v = v + 0_2 + 0_3 = 0_1 + v + 0_3$, donc $v = 0$.

  Si $v \in (E_1 + E_2) \cap E_3$, alors $v = v_1 + v_2$ et $v = v_3$. Donc $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, ce qui implique $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, donc $v = 0$.

- $\Leftarrow$: Supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0_E\}$. Soit $v = v_1 + v_2 + v_3 = v_1' + v_2' + v_3'$. Alors $(v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') = v_3' - v_3$. Le membre de gauche est dans $E_1 + E_2$ et celui de droite dans E_3. Comme l'intersection est $\{0_E\}$, les deux membres sont nuls. On a $v_3 = v_3'$. Le même argument s'applique à $v_1 - v_1' = -(v_2 - v_2')$, qui est dans $E_1 \cap E_2$, ce qui implique $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$. La décomposition est unique, donc la somme est directe.

1.6 Exercices supplémentaires

1.6.1 Exercice 16

1. Une base de $\mathbb{R}_4[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. La dimension est 5.
2. F est un sous-espace. Le polynôme nul est pair et F est stable : si $\lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in F, (\lambda P + Q)(X) = \lambda P(X) + Q(X) = \lambda P(X) + Q(X) = (\lambda P + Q)(X)$

   Un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$ est pair si $a_1 = a_3 = 0$. Une base est $(1, X^2, X^4)$. La dimension est 3.
3. G est un sous-espace car non vide et stable : si $si\lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in G, X(\lambda P + Q)'(X) = X(\lambda P'(X) + Q'(X)) = \lambda X P'(X) + X Q'(X) = \lambda P(X) + Q(X)$

   L'équation donne $P \in G \iff a + bX + cX2 + dX3 + eX4 = bX + 2cX^2 + 3dX^3 + 4eX^4$.

   Donc $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Les polynômes de G sont de la forme $a_1 X$. Une base est (X). La dimension est 1.
4. $F \cap G = \{0\}$, car un polynôme pair de la forme $a_1 X$ doit avoir $a_1 = 0$.

   $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = 3 + 1 - 0 = 4$. Le sous-espace $F + G$ a une dimension de 4, qui est inférieure à la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$ (5). Donc $F + G$ est un sous-espace.

1.6.2 Exercice 17

1. La trace [i] est une application linéaire. $\mathcal{N}_3$ est le noyau de cette

> **i Info**
> Pour rappel, la trace est la somme des éléments diagonaux direct de la matrice

application. Par le théorème du rang, $dim(\mathcal{N}_3) = dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - dim(Im(Tr)) = 9 - 1 = 8$.

2. L'espace engendré par la matrice identité, $Vect(I_3)$, est un sous-espace supplémentaire. Son intersection avec $\mathcal{N}_3$ est nulle.

3. Par le même argument, la dimension de $\mathcal{N}_n$ est $n^2 - 1$.

1.6.3 Exercice 18

1.
   - F_1 : La suite nulle est dans F_1. La somme et le produit par un scalaire d'éléments de F_1 restent dans F_1. F_1 **est un sous-espace vectoriel**.
   - F_2 : La suite nulle n'est pas dans F_2. F_2 **n'est pas un sous-espace vectoriel**.
   - F_3 : La suite nulle est bornée. La somme de deux suites bornées est bornée. Le produit d'une suite bornée par un scalaire est borné. F_3 **est un sous-espace vectoriel**.

> **Astuce**
> Voir cours Maths-calc-1 pour la démonstration sur les limites de suite.

2. Non. On cherche λ, μ tels que $5^n = \lambda 2^n + \mu 3^n$ pour tout n.

   Pour $n = 0, 1 = \lambda + \mu$.

   Pour $n = 1, 5 = 2\lambda + 3\mu$. On trouve $\lambda = -2, \mu = 3$.

   Pour $n = 2$, $25 = -2(4) + 3(9) = -8 + 27 = 19 \neq 25$.