TD1: Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués de $(*)$ sont du cours ou des compléments de cours. A travailler en classe et/ou chez soi à l'aide du livre de Grifone.
Les exercices supplémentaires marqués de $(**)$ ne seront pas forcément traités en classe.

Espaces vectoriels

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois : $(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ et $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$. Cet ensemble est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que les lois

$$x \oplus y = xy \qquad \text{et} \qquad \lambda \otimes x = x^\lambda \qquad \text{pour } x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

confèrent à E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. $(*)$ Soit E un espace vectoriel. Montrer que :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$.
2. $\forall v \in E : 0 \cdot v = \mathbf{0}_E$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E : \lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

Exercice 4. $(*)$ Soient $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux espaces vectoriels. On considère leur espace produit $\big(E_1 \times E_2, +_{12}, \cdot_{12}\big)$ où les opérations sont données par :

$$(u_1, u_2) +_{12} (v_1, v_2) = \big(u_1 +_1 v_1,\ u_2 +_2 v_2\big) \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot_{12} (u_1, u_2) = \big(\lambda \cdot_1 u_1,\ \lambda \cdot_2 u_2\big)$$

pour $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\big(E_1 \times E_2, +_{12}, \cdot_{12}\big)$ est un espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 5. On considère les quatre sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \qquad E_2 = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad E_4 = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Le(s)quel(s) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}^{[a,b]}$ l'espace vectoriel des applications d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles. Le(s)quel(s) des sous-ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$?

1. $E_1 = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
2. E_2, l'ensemble des applications surjectives de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
3. E_3, l'ensemble des applications $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$.

4. E_4, l'ensemble des applications croissantes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $(*)$ Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $(*)$ Montrer que $F + G = \{x + y \colon x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F + G \subset H$ si et seulement si $F \subset H$ et $G \subset H$.
4. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, génératrices. Bases

Exercice 8. On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, muni des lois usuelles.

1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$$F_1 = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\big|\; P(0) = P'(0) = 0\big\}$$
$$F_2 = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\big|\; P(0) = P(1) = 0\big\}$$
$$F_3 = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\big|\; \deg(P) = n\big\}$$

2. Le vecteur $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $P_1(X) = 1, P_2(X) = (X+1)^2$ et $P_3(X) = X^3$? Plus généralement, décrire $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
3. Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ ci-dessous, dire s'il s'agit d'une famille libre ou non :
   (a) $(3X, X^2 - 1, X^3)$.
   (b) $(X + 1, X - 1)$.
   (c) $(X^2 - 1, (X + 1)^2, X + 1)$.
4. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et avec $\deg(P_i) = i$ pour tout i. Dire si elle est une famille libre et décrire le sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Exercice 9. On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire si elle est libre, génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et/ou une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}_1 = \big(M_1, M_2, M_3\big), \quad \mathcal{F}_2 = \big(M_1, M_2, M_3, M_4\big), \quad \mathcal{F}_5 = \big(M_1, M_2, M_4, M_5\big).$$

Bases et dimension

Exercice 10. On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \big\{(a + 3b - 3c,\ -a + b - 5c,\ 2a + 3b) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$$
$$G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x - 6y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\big\}$$
$$H = \big\{\lambda \cdot (1, 1, 1) \ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}.$$

1. Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F, G et H et en déduire leurs dimensions.
3. Déterminer des équations de F, G et H.
4. Identifier les ensembles $F \cap G, F \cap H$ et $G \cap H$.

Exercice 11. $(*)$ Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) + \dim(F \cap G).$$

Somme directe, espaces supplémentaires

Exercice 12. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}_3$ des matrices symétriques et le sous-ensemble $\mathcal{A}_3$ des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et préciser leurs dimensions.
Généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit E l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $F \subset E$ le sous-ensemble des applications paires $(f(-x) = f(x))$ et soit $G \subset E$ le sous-ensemble des application impaires $(f(-x) = -f(x))$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$.
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et considérons les deux fonctions f_+ et f_- définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f_+(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_-(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
Montrer que $f_+ \in F$, $f_- \in G$ et $f = f_+ + f_-$.
3. En déduire que $E = F \oplus G$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit H un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ et soit $v \in E$ un vecteur.

1. $(*)$ Montrer que les sous-espaces vectoriels H et $\mathrm{Vect}(v)$ sont supplémentaires si et seulement si $v \notin H$.
2. On suppose que $v \notin H$. Montrer que pour tout vecteur $w \in H$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v+w)$ et H sont supplémentaires. (En particulier, cela montre qu'il existe typiquement *plusieurs* supplémentaires à H.)

Exercice 15. $(*)$ Soit E un espace vectoriel et E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}_E\}$ et $\big(E_1 + E_2\big) \cap E_3 = \big\{\mathbf{0}_E\big\}$.

Exercices supplémentaires $(**)$

Exercice 16. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes pairs, c'est-à-dire
$$F = \big\{P \in \mathbb{R}_4[X] \;\big|\; P(X) = P(-X)\big\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

3. Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par

$$G = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \;\middle|\; P(X) = XP'(X) \right\}$$

où P désigne le polynôme dérivé de P. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de G et en déduire sa dimension.

4. Déterminer $F \cap G$. Que peut-on dire du sous-espace vectoriel $F + G$?

Exercice 17. Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 3×3.

1. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{N}_3$ des matrices carrées de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ dont on précisera la dimension.
2. Trouver un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui soit supplémentaire à $\mathcal{N}_3$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ de trace nulle.

Exercice 18. On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$$F_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_0 = u_3 = 0 \right\}, \quad F_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_5 = 1 \right\}, \quad F_3 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u \text{ est bornée} \right\}.$$

2. Le vecteur $u = (5^n)_{n\in\mathbb{N}}$, est-il combinaison linéaire des vecteurs $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Pour $d \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u_d = (1^d, 2^d, 3^d, \dots)$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille de vecteurs $\big(u_0, \dots, u_d\big)$ est libre.