Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Sous-espace vectoriel

Proposition 1.1 : Caractérisation d'un SEV

F est un sev s'il contient le vecteur nul et s'il est fermé par addition et multiplication par un scalaire.

Proposition 1.2 : Ensembles particuliers

$F \cap G$ est un sev de E.

$F \cup G$ n'est pas un sev de E

Le complémentaire $E \setminus F$ n'est pas un sev

1.2 Bases

Définition 2.1 : Famille génératrice

Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est génératrice $\iff \forall x \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n,$ tels que $x = \lambda_1 v_1 * \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$

Définition 2.2 : Famille libre

Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre $\iff \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Proposition 2.1 : Caractérisation d'une famille libre

Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre $\iff$ aucun des vecteurs n'appartient à l'espace egendré par les autres.

Théorème 2.1 : Décomposition d'un vecteur sur une famille

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les vecteurs v_i (c'est-à-dire x est combinaison linéaire des v_i. Alors la décomposition de x sur les v_i est unique.

Théorème 2.2 : Existence d'une base en dimension finie

Soit G une famille génératrice. Considérons une famille libre $L \subset G$. Il existe alors une base B telle que $L \subset B \subset G$.

De toute famille génératrice on peut extraire une base.

1.3 Dimension

Proposition 3.1 : Famille et dimension

Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille ayant plus de n éléments est liée.

Dans un espace vectoriel de dimension n, les familles ayant moins de n éléments ne peuvent être génératrices.

Proposition 3.2 : Base et dimension

Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.

Toute famille libre ayant n éléments est une base.

Théorème 3.1 : Diùension d'un SEV

$\dim F \leq \dim E, \dim F = \dim E \iff F = E$

1.4 Somme directes

Définition 4.1 : Somme

On appelle somme de E_1, E_2 le sous-espace de E défini par

$$E_1 + E_2 = \{x \in E | \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2 : x = x_1 + x_2\}$$

Proposition 4.1 : Somme directe

E_1, E_2 sont en somme directe si $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. On le note alors $E_1 \oplus E_2$

Proposition 4.2 : Espaces supplémentaires

2 espaces sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$

Proposition 4.3 : Caractérisation d'un espace supplémentaire

$E = E_1 \oplus E_2 \iff E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim E_1 + \dim E_2$

Théorème 4.1 : Dimensions d'espaces complémentaires

$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$