

Chapitre

Produit scalaire

1.1 Produit scalaire et norme

π Définition 1.1 : Produit scalaire

Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ de dimension finie ou non.

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

- φ est une forme (l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$) bilinéaire si $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, de même pour y
- φ est symétrique $\iff \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- $\forall x, \varphi(x, x) \geq 0$
- φ est définie positive $\iff \forall x, \varphi(x, x) \geq 0 \wedge \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

On dit que φ est un produit scalaire $\iff \varphi$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

π Définition 1.2 : Espace Euclidien

Si la dimension de E est finie et φ produit scalaire, alors la paire (E, φ) est un espace euclidien.

π Définition 1.3 : espace Préhilbertien

Si la dimension de E est infinie, et φ produit scalaire, alors la paire (E, φ) est un espace préhilbertien.

**Définition 1.4 : Norme**

On note la norme associée au produit scalaire $\sqrt{(x|x)}$.

**Proposition 1.1 : Inégalité de Cauchy Swartz**

On munit E d'un produit scalaire, alors $\forall (x, y), (x|y) \leq \|x\| \|y\|$

**Proposition 1.2 : Propriétés de la norme**

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cas d'égalité

Le produit de deux vecteurs ne peut pas dépasser le produit de leurs longueurs. L'égalité n'arrive que si x et y sont colinéaires.

**Proposition 1.3 : Calcul du produit scalaire**

- $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$
- $(x|y) = \frac{1}{2}(-\|x - y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)$
- $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

1.2 Orthogonalité

**Définition 2.1 : Vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs y et x sont orthogonaux quand leur produit scalaire est nul. On note $x \perp y$

**Théorème 2.1 : Pythagore**

En réels, $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

x



Définition 2.2 : Base orthogonale/orthonormée

Une base $e_1, \dots, e_n$ est orthogonale quand $\forall i, j, i \neq j, e_i \perp e_j$

Une base est orthonormée quand $\forall i \neq j, e_i \perp e_j, \forall i, \|e_i\| = 1$

x Validité

Attention, Pythagore ne marche sous cette forme simple que dans les espaces réels.



Proposition 2.1 : Décomposition dans une base orthonormée

Si $e_1 \dots e_n$ est un BON, alors $\forall x \in E, x = (e_1|x)e_1 + \dots + (e_n|x)e_n$

Les coordonnées de x dans la base $e_1, \dots, e_n$, notées $(x_1, \dots, x_n)$ sont données par $x_i = (e_i|x)$



Proposition 2.2 : Procédé de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque de E . Il existe une base orthonormée $e_1, \dots, e_n$ telle que $\forall p, \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

1.3 Sous espace orthogonal et projection



Définition 3.1 : Orthogonal d'une partie

Soit E un espace euclidien. A est une partie de E . L'orthogonal de A , noté $A^\perp$ est donné par $A^\perp = \{y \in E / \forall a \in A (y|a) = 0\}$



Proposition 3.1 : Orthogonal d'une partie : sous-espace

$A^\perp$ est toujours un sev de E même si A n'est qu'une partie quelconque de E .



Proposition 3.2 : Supplémentaire orthogonal

[Supplémentaire orthogonal] F sev de E euclidien, F et $F^\perp$ sont supplémentaires $\iff E = F \oplus F^\perp$

×



Proposition 3.3 : Projection orthogonale

F un SEV de E , $x \in E$. Alors $\forall y \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\| \iff \|x - p_F(x)\| = \min(\|x - y\|)$ C'est la distance de x à F et $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F .

× Validité

En dimension infinie, cette propriété (Supplémentaire orthogonal) est fausse en général!