

Chapitre

Espace euclidien

1.1 Montrer qu'une application est un produit scalaire

1.1.1 Cas général

Pour qu'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou φ) soit un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E , il faut vérifier quatre points :

1. **Bilinéarité** : Linéaire par rapport à chaque argument.
2. **Symétrie** : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. **Positivité** : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$.
4. **Caractère défini** : $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$.

1.1.2 Exemples d'espaces

- **Sur les espaces de fonctions** : Pour montrer le caractère *défini* de $\langle f, f \rangle = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt$:
 1. On part de $\langle f, f \rangle = 0$.
 2. Or, l'application $t \mapsto \frac{f(t)^2}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, 1]$.
 3. D'après le théorème de l'intégrale nulle, une fonction continue positive d'intégrale nulle est identiquement nulle.
 4. Donc $\forall t \in [0, 1], \frac{f(t)^2}{1+t^2} = 0$, ce qui implique $f^2(t) = 0$ puis $f = 0$.
- **Sur les polynômes** : Pour $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ sur $\mathbb{R}[X]$:
 1. Si $\langle P, P \rangle = 0$, alors $P(0)^2 + \int_0^1 (P'(t))^2 dt = 0$.
 2. Par somme de termes positifs, on a $P(0) = 0$ et $\int_0^1 (P'(t))^2 dt = 0$.

3. Le raisonnement de l'intégrale (ci-dessus) donne $P'(t) = 0$.
 4. Un polynôme dont la dérivée est nulle est constant ($P = \lambda$).
 5. Comme $P(0) = 0$, la constante est nulle : $P = 0$.
- **Paramètre λ sur $\mathbb{R}^2$** : Pour $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + \lambda x_2y_2$:
 1. On écrit la forme quadratique associée : $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2$.
 2. **Méthode de Gauss** : On réduit en carrés : $q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (\lambda - 1)x_2^2$.
 3. **Condition** : Pour que q soit définie positive, il faut que les coefficients devant les carrés soient strictement positifs.
 4. Conclusion : $\lambda - 1 > 0 \implies \lambda > 1$.



Forme quadratique

- **Substitution** : On remplace tous les y_i par des x_i dans l'expression de φ .
- **Réduction** : On regroupe les termes pour obtenir une somme de carrés (Méthode de Gauss).
- **Exemple (Ex 1.c)** : $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + \lambda x_2y_2 \implies q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (\lambda - 1)x_2^2$.

- **Espace de matrices** : Pour $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$:
 1. **Symétrie** : Utiliser $\text{tr}(M) = \text{tr}(M^T)$. Ici $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A)$.
 2. **Positivité** : $\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.
 3. Cette somme de carrés est clairement positive, et nulle si et seulement si tous les coefficients a_{ij} sont nuls ($A = 0$).

1.2 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité s'énonce : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, avec égalité si et seulement si (x, y) est liée.

- **Choisir les bons vecteurs** : Pour démontrer $(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$:
 1. On pose $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (1, \dots, 1)$.
 2. Le produit scalaire canonique donne $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n (x_k \times 1) = \sum x_k$.
 3. Les normes au carré sont $\|u\|^2 = \sum x_k^2$ et $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n 1^2 = n$.
 4. L'application directe de CS donne $(\sum x_k)^2 \leq (\sum x_k^2) \times n$.

- **L'astuce de l'inverse** : Pour démontrer $\sum \frac{1}{x_k} \geq n^2$ sachant $\sum x_k = 1$:
 1. On cherche à faire apparaître 1 par produit scalaire. On pose $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$.
 2. Alors $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n (\sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}) = \sum_{k=1}^n 1 = n$.
 3. $\|u\|^2 = \sum (\sqrt{x_k})^2 = \sum x_k = 1$ (d'après l'énoncé).
 4. $\|v\|^2 = \sum (\frac{1}{\sqrt{x_k}})^2 = \sum \frac{1}{x_k}$.
 5. CS ($\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$) devient : $n^2 \leq 1 \times \sum \frac{1}{x_k}$.



Astuce

Si vous voyez une somme de fractions ou de racines dans une inégalité, pensez immédiatement à poser u_k ou v_k comme étant la racine carrée du terme pour "annuler" les puissances lors du passage au carré de la norme.

1.3 Manipuler l'orthogonalité et le complément orthogonal

1.3.1 Propriétés théoriques

Il est crucial de connaître les relations de passage au complément orthogonal (noté $F^\perp$).

- **Inclusion** : $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ (l'orthogonalité renverse les inclusions).
- **Somme et intersection** : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

1.3.2 Déterminer $F^\perp$ en pratique

- Si $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_k)$, alors $x \in F^\perp \iff \langle x, v_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Cela mène à un système d'équations linéaires.
- Si F est défini par une équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $F^\perp = \text{vect}((a, b, c))$.

1.4 Orthonormalisation (Procédé de Gram-Schmidt)

Pour transformer une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$:

1. $v_1 = u_1$, puis $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.
2. $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$, puis $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$.
3. $v_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$, puis $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$.
4. $v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i$, puis $e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$.



Variante

On peut aussi choisir de normaliser les vecteurs obtenus une fois qu'on a obtenu des vecteurs orthogonaux pour simplifier les calculs.

1.5 Calculer une projection orthogonale

Soit F un sous-espace de E et $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F . La projection orthogonale de x sur F est :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$$

- **Étape 1 :** Trouver une base de F .
- **Étape 2 :** Orthonormer cette base (Gram-Schmidt).
- **Étape 3 :** Appliquer la formule ci-dessus.
- **Matrice de projection :** Pour trouver la matrice dans la base canonique, on calcule les images $p_F(i), p_F(j), \dots$ des vecteurs de la base canonique.