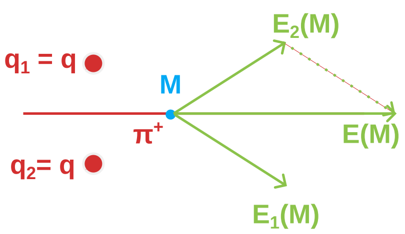
Chapitre 3

Généralité sur le champ et potentiel

3.1 Propriété de symétrie

3.1.1 Pour un point dans un plan π^+

On prend comme exemple M contenu dans le plan médiateur de 2 charges ponctuelles.



On a $\overrightarrow{E_2(M)} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 ||\overrightarrow{P_2M}||}\overrightarrow{e_{P_2M}}$ et $\overrightarrow{E_1(M)} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 ||\overrightarrow{P_1M}||}\overrightarrow{e_{P_1M}}$

Mais comme $||\overrightarrow{P_1M}|| = ||\overrightarrow{P_2M}||$ et $q_1 = q_2$, on a $||\overrightarrow{E_1(M)}|| = ||\overrightarrow{E_2(M)}||$

On en déduit que si $M \in \pi^+, \overrightarrow{E}(M)$

Le fait que M doivent appartenir au plan est primordial

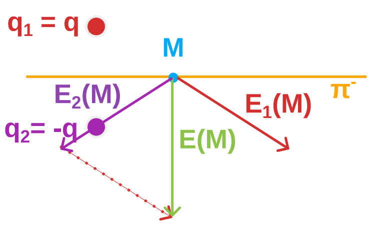
e

st contenu dans ce plan qui passe par M.

Remarque

Si $M \in$ plusieurs plans, alors $\vec{E}(M)$ est contenu dans leur intersection (si $\vec{E}(M) \neq \vec{0}$).

3.1.2 Pour un poinr dans un plan π^-



On a de la même façon $||\overrightarrow{P_1M}|| = ||\overrightarrow{P_2M}||$ et $|q_1| = |q_2|$ donc $||\overrightarrow{E_1(M)}|| = ||\overrightarrow{E_2(M)}||$

On en déduit que $\vec{E}(M)$ est orthogonal au plan π^-.

3.1.3 Plans π ne passant pas par M

Dans ce cas, l'existence de ces plans ne donnent aucune information sur la direction du vecteur $\vec{E}(M)$!

3.1.4 Vecteurs vrais/polaire

On dit que les vecteurs possédants les êmes propriétés que $\vec{E}(M)$, i.e. $\vec{E}(M) \in \pi^+, \vec{E}(M) \perp \pi^-$ passant par M sont dit vrais. Ce qui relie le point M à la source ne fait pas intervenir le produit vectoriel.

3.2 Propriétés d'invariance

Théorème 2.1 : Principe de Curie

Les effets ont au moins les symétries de leur cause

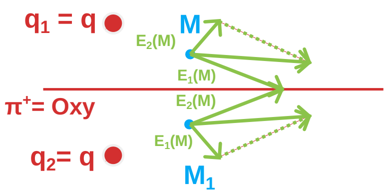
Ici, les effets sont $\vec{E}(M), V(M)$ et les causes la distribution de charge.

Donc si cette dernière possède des invariances, les composantes non nulle de $\vec{E}(M)$ dans la base judicieusement choisie et V(M)possèdent les mêmes invariances.

3.3 Propriété de parité de $\overrightarrow{E}(M), V(M)$ autour de plans

3.3.1 Exemple

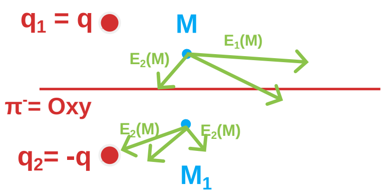
Plan +



On remarque que $||\overrightarrow{E_1(M_1)}|| = ||\overrightarrow{E_2(M)}||$ et $||\overrightarrow{E_2(M_1)}|| = ||\overrightarrow{E_1(M)}||$ mais aussi que $||\overrightarrow{E_1(M)}|| > ||\overrightarrow{E_2(M)}||$

On en déduit que $E_x(x, y, z) = E_x(x, y, -z)$, $E_y(x, y, z) = E_y(x, y, -z)$ et $E_z(x, y, z) = -E_z(x, y, -z)$.

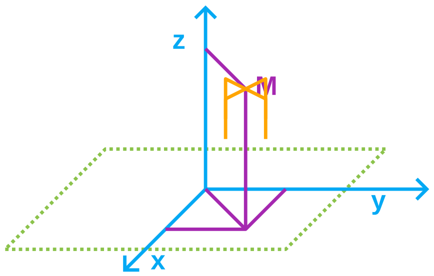
Plan -



On remarque que $E_x(x, y, z) = -E_x(x, y, -z)$, $E_y(x, y, z) = -E_y(x, y, -z)$ et $E_z(x, y, z) = E_z(x, y, -z)$.

3.4 Exemples

3.4.1 $\overrightarrow{E}(M)$ crée par un plan infini



Système de coordonnées

Ce système n'est ni à symétrie sphérique ou circulaire ✕ , on prend donc des coordonnées cartésiennes pour repérer M et on utlise la base cartésienne locale $B(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On place l'origine sur le plan chargé pour tirer partie des propriétés de parité et on prend $\overrightarrow{e_z} \perp$ au plan

✕ **Difficulté**
C'est pas cylindrique car il n'y a pas un UNIQUE axe de rotation

Symétries

Tous les plans verticaux passant par M sont des π^+ passant par M. $\overrightarrow{E}(M)$ étant un vecteur vrai ($\in \pi^+$) passant par M (intersection), $\overrightarrow{E}(M) \in axe(M, \overrightarrow{e_z})$ et $\overrightarrow{E}(M) = E_z(x, y, z)\overrightarrow{e_z}$

Invariance

Le système est invariant par translaation ✓ selon $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$.

Par le principe de Curie, $E_z(x, y, z)\overrightarrow{e_z}$ ne dépend que de z : $E_z(z)\overrightarrow{e_z}$

✓ **Exemple**
Comme il n'y a pas de symétrie circulaire, on envisage pas des symétries par rotation (même si il peut y en avoir)

Parité / Imparité

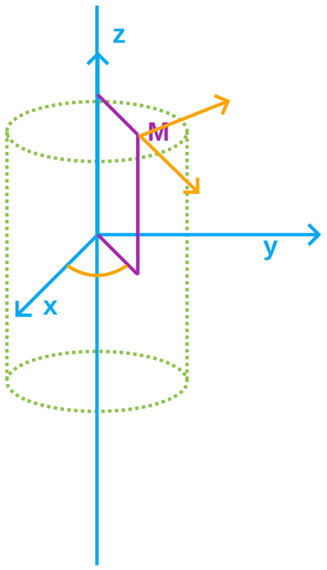
Le plan chargé est un plan π^+, donc $E_z(-z) = -E_z(z)$ qui est impaire de z. De plus, $V(z) = V(-z)$ qui est paire de z.

Bilan

On sait que $\overrightarrow{E}(M) = E_z(z), E_z(-z) = -E_z(z), V(-z) = V(z)$

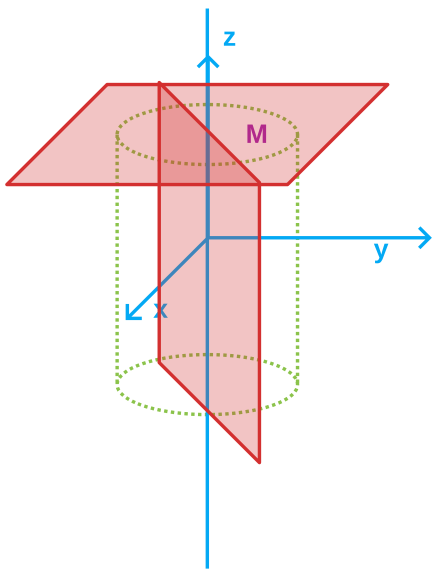
3.4.2 Cylindre infiniment long chargé en volume

Base + Coordonnées



La distribution de charge est à symétrie cylindrique autour de l'axe (Oz) du cylindre chargée, donc on va utiliser la base cylindrique locale $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}$

Symétries



On remarque que $M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}$ et $M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_z}$ sont des plans π^+ passant par M

On en déduit que $\overrightarrow{E}(M)$ est vrai et qu'il appartient aux 2 plans cidessus. Donc il est parralèle à l'axe $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{E}(M) = E_\rho(\rho,\varphi,z)\overrightarrow{e_\rho}$

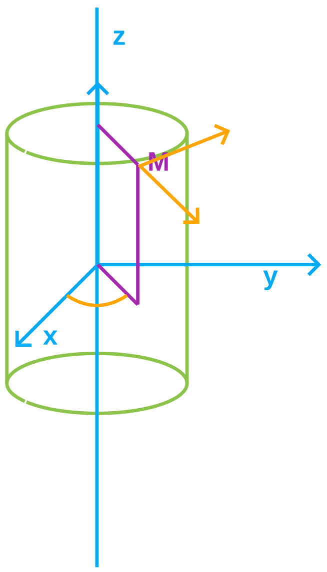
Invariances

Le système (Cylindre + Point) est invariant par

- rotation (φ) du cylindre autour de Oz
- translation du cylindre le long de Oz

On en déduit que $E_\rho(\rho,\varphi,z)\overrightarrow{e_\rho} = E_\rho(\rho)\overrightarrow{e_\rho}$ et $V(M) = V(\rho)$.

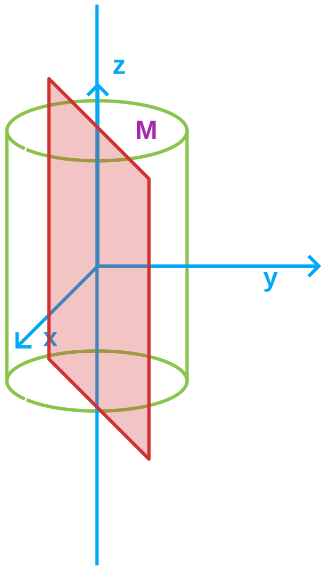
3.4.3 Cylindre de longueur L chargé en surface



La distribution de charge est à symétrie cylindrique autour de l'axe (Oz) du cylindre chargée, donc on va utiliser la base cylindrique locale $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}$

On choisit l'origine au centre du cylindre pour mieux utiliser les propriétés de symétrie.

Le seul π^+ est $M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_z}$, donc $\overrightarrow{E}(M)$ est vrai à ce π^+ et $\overrightarrow{E}(M) = E_\rho\overrightarrow{e_\rho} + E_z\overrightarrow{e_z}$



$M \in (Oxy)$

On peut retrouver le plan $M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}$ et on retrouve le résultat du cylindre infini.

$M \in (Oz)$

Tous les plans contenant (Oz) sont π^+, et $\overrightarrow{E}(M)$ appartient à leur intersection et $\overrightarrow{E}(M) = E_z\overrightarrow{e_z}$

Si M est à l'origine

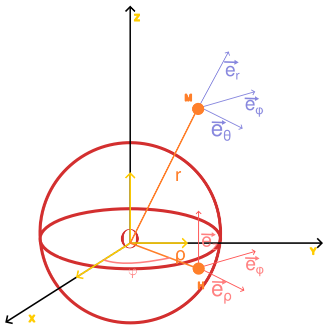
Tous les plans contenant Oz et le plan (Oxy) sont π^+. Si $\overrightarrow{E}(M) \neq 0$, il doit appartenit à chacun de ces plans, ce qui est impossble donc $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0}$

Invariances quand M quelconque

Le sytème n'est invariant que par rotation φ autour de Oz, donc $\overrightarrow{E}(M) = E_\rho\overrightarrow{e_\rho} + E_z\overrightarrow{e_z}$ ne dépend pas de φ.

Donc $\overrightarrow{E}(M) = E_\rho(\rho, z)\overrightarrow{e_\rho} + E_z(\rho, z)\overrightarrow{e_z}$

3.4.4 Une sphère chargée en volume



La distribution de charge est à symétrie sphérique autour du centre de la sphère. Donc on chosit les coordonnées sphériques et on choisit O le centre de la sphère, avec une base sphérique.

On cherche maintenant les symétries :

Tout plan contenant l'axe (OM) est un plan π^+ passant par M. Il y en a une infinité.

De plus, $\overrightarrow{E}(M)$ est vrai et appartient à leur intersection. On en déduit qu'il n'y a qu'une composante nulle : $E_r(M)\overrightarrow{e_r}$

Étudions les invariances : Le système est invariant par toute rotation par n'importe quel angle autour du point O, en particulier par rotation de la sphère de $\Delta\varphi$ autour de (O_z) et de $\Delta\theta$ outour de $0, \overrightarrow{e_\varphi}$.

Par le principe de Curie, $E_r(M) = E_r(r), V(M) = V(r)$

Remarque

On cherche la valeur de $E(0)$ qui appartien à tous les plans π^+ passant par O. Il y en a une infinité, donc c'est impossible.

3.5 Lien entre $\overrightarrow{E}(M)$ et $V(M)$

3.5.1 Équation intégrale entre E et V

Théorème 5.1 : Équation intégrale

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}(M)$$

Si $B \to A$, l'intégrale est nulle et $V(B \to A) = V(A)$ donc V est une fonction continue des coordonnées de M.

3.5.2 Équation locale entre E et V

Théorème 5.2 : EQL entre E et V 1

$$\mathrm{d}V = -\overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}(M)$$

On a $V(M') = V(M) + \mathrm{d}V(M)$, i.e. si on passe de M à M', alors le potentiel varie comme indiqué.

Ainsi, dans la BOND cartésienne, on a $\mathrm{d}(V) = -E_x\mathrm{d}x - E_y\mathrm{d}y - E_z\mathrm{d}z$. On peut aussi écrire $\mathrm{d}V = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \cdots + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z$.

On déduit de ces 2 équations : $E_x - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}, \ldots, E_z - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}$.

On en déduit la seconde forme de l'EQL :

Théorème 5.3 : EQL entre E et V 2

$$\overrightarrow{E}(M) = -grad(V(M))$$

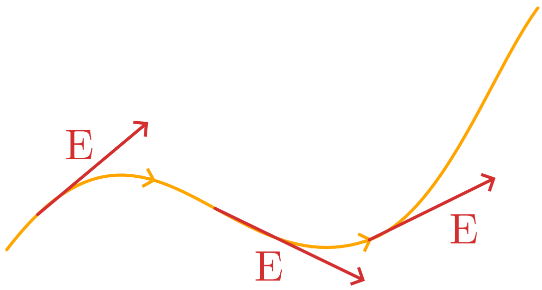
Gradient dans les 3 systèmes de coordonnées (À savoir)

$$gradg(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial g}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \varphi}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$gradh(, \theta, \varphi) = \frac{\partial h}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial h}{\partial \varphi}$$

On remarque que le dénominteur correspond au déplacement élémentaire

3.6 Lignes de champ électrique



Définition 6.1 : Ligne de champ

Les lignes du champ électrique sont l'ensemble des courbes en tout point desquel le champ électrique à la ligne de champ. Elles sont orientées de la sens du champ électrique.

Tracer les lignes de champ permet de cartographier le champ dans l'espace.

Exemple de 2 particules dans l'espace

3.7 Surfaces équipotentielles

Définition 7.1 : Surface équipotentielle

La surface équipotentielle de potentiel V_0 est l'ensemble des points M tel que $V(M) = V_0$

2 surfaces distinctes ne se coupent jamais.

Exemple des 2 particules de charge contraire :

3.8 Lien entre surfaces equipotentielles et lignes de champ

Théorème 8.1 : Ligne de champ et Surface équipotentielle

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces de champ qu'elles coupent.

Preuve 8.1

On considère 2 points infiniment proches : $\mathrm{d}l = \overrightarrow{MM'}$ et $V(M') = V(M) + \mathrm{d}V(M)$. De plus, $\mathrm{d}V = -\overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}$.

Si M, M' appartiennent à la même surface équipotentielle, $V(M) = V(M') \Rightarrow \mathrm{d}V(M) = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l} = 0$, et comme $\overrightarrow{E}(M) \neq \overrightarrow{0}$), $\overrightarrow{E}(M) \perp \mathrm{d}\overrightarrow{l}$.

Théorème 8.2 : Orientation des lignes de champ

Les lignes de champ sont orienté dans le sens des potentiels décroissants.

Preuve 8.2

On considère M_1 sur la surface V_2 et M_2 sur V_2. On suppose que les 2 points sont liés par la même ligné de champ.

On suppose de plus que M est un point quelconque sur la ligne de champ entre M_1 et M_2 et que $\overrightarrow{E}(M)$ est orienté de M_1 vers M_2.

On applique l'équation intégrale entre E et V :

$$V(M_2) - V(M_1) = -\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}(M)$$

On en déduit que $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ est orienté de M_1 vers M_2.

Avec ces hypothèses, on déduit que l'intégrale est sytictement positive, donc que $V(M_2) - V(M_1) < 0 \Rightarrow V(M_2) < V(M_1)$