



# Chapitre

## Aimantation

### 1.1 Champ magnétique créé par une boule aimantée : Méthode du champ auxiliaire

#### 1.1.1 Question préliminaire

On cherche d'abord le champ électrique créé par une boule de rayon  $R$  et de densité volumique de charge  $\rho_0$ .

On se place en coordonnées sphériques et on utilise le théorème de Gauss <sup>i</sup> :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_{int} \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_{int} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

$$E_{ext} \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E_{ext} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

<sup>i</sup> Info

On a une symétrie sphérique

#### 1.1.2 Potentiel vecteur à l'extérieur

On considère une sphère magnétique homogène avec une aimantation uniforme  $\vec{M} = M\vec{e}_z$ .

Le potentiel créé par une boule aimantée vaut <sup>x</sup> :

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\rho_{aux}} (\vec{M} \wedge \vec{E}_{aux}(N))$$

<sup>x</sup> Difficulté

Cette formule n'est pas à savoir

On le calcule à l'extérieur au point  $N$  ( $r > R$ ) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{m,ext}} &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\rho_{aux}} \left( \overrightarrow{M} \wedge \frac{\rho_{aux} R^3}{3\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{e}_r \right) \\ &= \frac{\mu_0 R^3 M}{3r^2} (\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r) \\ &= \frac{\mu_0 R^3 M}{3r^2} \sin \theta \overrightarrow{e}_\varphi \end{aligned}$$



### Produit vectoriel

$$\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r = (\cos \theta \overrightarrow{e}_r - \sin \theta \overrightarrow{e}_\theta) \wedge \overrightarrow{e}_r = -\sin \theta (\overrightarrow{e}_\theta \wedge \overrightarrow{e}_r) = \sin \theta \overrightarrow{e}_\varphi.$$

On calcule maintenant le moment dipolaire total de la sphère <sup>i</sup> :

$$\overrightarrow{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 \overrightarrow{M}$$

#### i Info

On intègre  $\overrightarrow{M}$  sur le volume. Comme il est constant,  $\overrightarrow{M} = \iiint \overrightarrow{M} d\tau = \overrightarrow{M} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$ .

En substituant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\overrightarrow{A_{m,ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{e}_r}{r^2}$$

C'est la forme standard du potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique  $\overrightarrow{M}$  placé en  $O$ .

## 1.1.3 Champ magnétique créée

On sait que  $\overrightarrow{B_{ext,m}} = \text{rot} \overrightarrow{A_{m,ext}}$

On utilise les expressions du rotationnel en coordonnées sphériques

$$\text{rot} \overrightarrow{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \overrightarrow{e}_\varphi$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_{m,ext}} &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \overrightarrow{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin \theta}{r^2} r \right) \overrightarrow{e}_\theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \overrightarrow{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta r) \overrightarrow{e}_\theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \overrightarrow{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta r) \overrightarrow{e}_\theta \right) \\ &= \dots \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \overrightarrow{e}_r + \sin \theta \overrightarrow{e}_\theta) \end{aligned}$$

On remarque que cela correspond à un dipôle  $M$  en  $O$ .

## 1.1.4 Champ magnétique à l'intérieur

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{m,int}} &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\rho_{aux}} \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{E_{aux,int}} \\ &= \frac{\mu_0}{3} \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{r} \\ &= \frac{\mu_0}{3} r \sin(\theta) \overrightarrow{e}_\theta \end{aligned}$$

On peut en déduire le champ magnétique à l'aide du rotationnel.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_{int,m}} &= \text{rot } \overrightarrow{A} \\ &= \frac{\mu_0}{3} M \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin^2 \theta) \overrightarrow{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin(\theta)) \overrightarrow{e}_\theta \right) \\ &= 2 \frac{\mu_0 M}{3} (\cos(\theta) \overrightarrow{e}_r - \sin(\theta) \overrightarrow{e}_\theta) \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 M \overrightarrow{e}_z \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 \overrightarrow{M} \end{aligned}$$

## 1.1.5 Relations de continuité

On suppose maintenant la sphère composée d'un matériau LHI placé dans un champ appliqué uniforme  $\overrightarrow{B}_a$

On se place à la surface de la sphère.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B}_{ext} &= \overrightarrow{B}_a + \overrightarrow{B}_{m,ext} \\ &= \overrightarrow{B}_a + \frac{\mu_0 R^3}{3 r^3} M(\dots) \\ \overrightarrow{B}_{int} &= \overrightarrow{B}_a + \overrightarrow{B}_{m,int} \\ &= \overrightarrow{B}_a + \frac{2}{3} \mu_0 M \overrightarrow{e}_z \end{aligned}$$

La relation de passage est

$$\overrightarrow{n}_{12} \cdot (\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1) = 0$$

C'est bien vérifié.

On vérifie maintenant la deuxième relation de passage pour  $\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}_{int} &= \frac{\overrightarrow{B}_{int}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} \\ &= \frac{\overrightarrow{B}_a}{\mu_0} + \frac{\overrightarrow{B}_{m,int}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} \\ &= \frac{\overrightarrow{B}_a}{\mu_0} + \frac{2}{3} \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{B}_a}{\mu_0} - \frac{\overrightarrow{M}}{3} \\ \overrightarrow{H}_{ext} &= \frac{\overrightarrow{B}_{ext}}{\mu_0} \end{aligned}$$

**Astuce**

La réponse du système sera donc aussi uniforme

**Astuce**

On remarque que  $\overrightarrow{B}_a$  s'annule puisqu'il est uniforme

Car pas d'aimantation à l'extérieur

On vérifie la relation de passage :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{s, libre}$$

Ici,  $\vec{J}_s = 0$  car pas de courant surfacique. Il y a donc continuité de la composante tangentielle de  $\vec{H}$

La relation est vérifiée.

## 1.1.6 Topologie courant d'aimantation équivalents

- $\vec{J}_m = 0$  car  $\vec{M}$  uniforme Ici
- $\vec{J}_{s, m} = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} = M \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = M \sin \theta \vec{e}_\theta$

## 1.2 Cylindre - Aimantation non uniforme

### 1.2.1 Expression de la densité volumique de courant



Signification de  $\vec{j}$  et I

C'est le nombre de charges qui traventent par unité de temps. L'unité est le  $A \cdot m^{-2}$  I correspond à son intégrale sur la section du fil. J est donc par unité de surface.

Ici,

$$\vec{J}_{libre} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$$

### 1.2.2 Excitation magnétique

Dans le fil, on a  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . En outre,  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H}$ . Enfin, on a  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$  avec  $\mu_r = 1 + \chi_m$  la permittivité relative au vide.

De plus,  $\vec{J}_{libre} = \text{rot} \vec{H}$

On étudie les invariances par rotation autour de Oz et par translation autour de ce même axe.

## ÉLECTROMAGNÉTISME 3 & Aimantation, Champ magnétique $\vec{B}$

Le plan  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie, donc c'est selon  $\vec{e}_\varphi$

On applique le théorème de Maxwell-Ampère sous sa forme intégrale.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{libre}$$

On prend comme contour d'ampère un cercle perpendiculaire à l'axe de façon à ce que le rayon soit constant.

On a  $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

On s'appuie sur le contour.

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi\rho^2 J_{libre}$$

On en déduit que

$$\vec{H}_{int} = \frac{I_{libre}}{2\pi R^2} \rho \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H}_{ext} = \frac{I_{libre}}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

Il y a bien continuité.

## 1.2.3 Champ magnétique $\vec{B}$


On a

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 \mu_r \vec{H}_{int} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}_{int}$$

À l'extérieur,

$$\vec{B}_{ext} = \mu_0 \vec{H}_{ext}$$

On remarque que ce n'est pas continue.

De plus,  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}_{int}$  

 Info

Il n'y a pas de M à l'extérieur

## 1.2.4 Relations de passage

On vérifie les relations de passage en  $\rho = R$ .

La composante normale de  $\vec{B}$  est continue, en effet, B est tangent donc la composante normale est nulle.

La composante tangentielle de  $\vec{H}$  :  $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s = \vec{0}$ . Elle est continue car  $\vec{H}_{int} = \vec{H}_{ext}$  en  $\rho = R$

## 1.2.5 Courant d'aimantation

On peut calculer les courants volumiques :

$$\vec{J}_m = \text{rot} \vec{M} \quad (1.1)$$

$$= \frac{\chi_m I}{\pi R^2} \vec{e}_z \quad (1.2)$$

De même pour le courant surfacique, en  $\rho = R$  :

$$\vec{J}_s = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} \quad (1.3)$$

$$= -\frac{\chi_m I}{\pi R} \vec{e}_z \quad (1.4)$$