Chapitre 5

Ondes électromahnétiques dans un milieu matériel

Rédigé par PAULHENRY SAUX
Université Paul Sabatier · L2 PS

5.1 Équations de Maxwell

5.1.1 Équations de Maxwell dans un milieu matériel

On a dans un milieu matériel

Théorème 1.1 : Équations de Maxwell dans un milieu matériel

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{H} - \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = \overrightarrow{j_{libre}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$
- $\mathrm{Div}\,\overrightarrow{D} = \rho_{libre} + \rho_{autres}$
- $\mathrm{Div}\,\overrightarrow{B} = 0$

Théorème 1.2 : Relations de passage

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{1\to 2} = \sigma \quad \text{(Composante normale de } \vec{D}) \tag{5.1}$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n}_{1\to 2} = \vec{0} \quad \text{(Composante tangentielle de } \vec{E}) \tag{5.2}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1\to 2} = 0 \quad \text{(Composante normale de } \vec{B}) \tag{5.3}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n}_{1\to 2} = \vec{j}_S \quad \text{(Composante tangentielle de } \vec{H}) \tag{5.4}$$

5.2 Grandeurs énergétiques

Dans le vide :

- Densité volumique dénergie em : $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Vecteur de Poyting : $\Pi = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ défini à partir du champ des réels
- Pour une onde progressive dans la direction u : $\vec{Pi} = wc\vec{u}$: Pi est un courant volumique d'énergie em.

Dans le milieu matériel linéaire :

- Densité volumique dénergie em : $w = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2} + \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}$
- Vecteur de Poyting : $\Pi = \vec{E} \wedge \vec{H}$ défini à partir du champ des réels

On introduit la puissance moyenne rayonnée à travers une surface S :

$$P = \iint_S < \vec{\Pi} >_{temps} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

L'intensité vaut alors $I = \frac{P}{S}$

5.3 Ondes électromagnétiqus dans un milieu Diélectrique

5.3.1 Ondes monochormatiques dans un milieu diélectrique LHI

On consdidère des milueux localment neutres, isolants et non magnétique :

- $\rho_{libre} = 0$
- $\overrightarrow{j_{libre}} = 0$
- $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$

On introduit la relation constitutive du milieu : $\overrightarrow{\underline{D}} = \epsilon_0 \underline{\epsilon_r}(\omega) \overrightarrow{\underline{E}}$ et $\epsilon_r = 1 + \chi_e(\omega)$

Les équations de Maxwell sont identiques à l'exception que $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$:Les ondes em qui peuvent se propager dans le milieu sont semblables à celles de propageant dans le vide.

$$\nabla^2 \overrightarrow{\underline{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{0}$$

avec la vitesse de propagation : $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$

5.3.2 Ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

Une onde plane se caractérise par des amplitudes identiques en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation. On se place dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI).

Définition 3.1

Structure de l'OPPM dans un milieu LHI En recherchant des solutions sous forme de vagues planes complexes de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E}}_0 \exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})\right)$, les équations de Maxwell se réduisent aux relations algébriques suivantes :

- Transversalité : $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\underline{E}} = 0$ et $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\underline{B}} = 0$
- Relation de structure : $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\underline{E}} = \omega \overrightarrow{\underline{B}}$
- Équation d'Ampère-Maxwell : $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\underline{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_r(\omega) \overrightarrow{\underline{E}}$

Trièdre direct

La relation de structure implique que le trièdre $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\underline{E}}, \overrightarrow{\underline{B}})$ est direct. Les champs électrique et magnétique vibrent en phase dans un milieu non absorbant.

L'équation de propagation (équation de Helmholtz) pour le champ électrique se simplifie sous la forme :

$$k^2 \underline{\overrightarrow{E}} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \underline{\overrightarrow{E}}$$

La nature de la permittivité diélectrique relative $\epsilon_r(\omega)$ détermine le comportement de l'onde dans le milieu :

Proposition 3.1

Propriétés du milieu selon $\epsilon_r(\omega)$

- **Milieu transparent** : $\epsilon_r(\omega)$ est réel et strictement positif. Le vecteur d'onde $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ est réel : l'onde se propage sans atténuation de son amplitude.
- **Milieu dispersif** : ϵ_r dépend explicitement de la pulsation ω. Des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes.
- **Milieu non dispersif** : $\epsilon_r =$ cste. C'est le cas unique du vide où $\epsilon_r = 1$.

Cas des milieux conducteurs ou absorbants

Si $\epsilon_r(\omega)$ possède une composante imaginaire non nulle, le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ devient complexe ($\underline{\overrightarrow{k}} = \overrightarrow{k}' - i\,\overrightarrow{k}''$), ce qui traduit physiquement une atténuation (effet Joule ou absorption) de l'onde lors de sa propagation.

On introduit l'indice de réfraction du milieu $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$, ainsi que la vitesse de phase de l'onde $v_\varphi(\omega)$:

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$$

Longueur d'onde

Dans un milieu matériel d'indice $n(\omega)$, la longueur d'onde est réduite par rapport à sa valeur dans le vide λ_0 :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n(\omega)}$$

5.3.3 Aspects énergétiques

Le transport d'énergie par l'onde électromagnétique est décrit par le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$.

Calcul de la puissance instantanée

Pour les aspects énergétiques (produits de champs), il est impératif d'utiliser les **champs réels** et non les expressions complexes !

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}_{\text{réel}} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{réel}}}{\mu_0}$$

Pour une OPPM se propageant selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ dans un milieu transparent d'indice $n(\omega)$, le vecteur de Poynting instantané s'écrit :

$$\overrightarrow{\Pi} = n(\omega)c\epsilon_0 E_{\text{réel}}^2 \overrightarrow{u}$$

Moyenne temporelle

En pratique, les détecteurs (œil, photodiodes) sont sensibles à la puissance moyenne. Pour une OPPM, la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting (l'éclairement) vaut :

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} n(\omega)c\epsilon_0 E_0^2 \overrightarrow{u}$$

5.3.4 Milieux absorbants

On a ϵ_r complexe donc $\overrightarrow{k}$ complexe.

- Si $\underline{\epsilon_r} = \epsilon_r'$:
  - Si $\epsilon_r' > 0$: propagation sans atténuation : milieu transparent : $e^{i(kz-\omega t)}$
  - Si $\epsilon_r' < 0$: pas de propagation, que de l'atténuation : $e^{-kz}e^{-i\omega t}$
- Dans le cas contraire, absorption, propagation et atténuation

5.3.5 Réflexion et transmission d'une onde à l'interface entre 2 diélectriques