Chapitre 1

Mécanique lagrangienne

Rédigé par **PAULHENRY SAUX**
Université Paul Sabatier · L2 PS

1.1 Introduction

1.1.1 Pourquoi la mécanique Lagrangienne ?

Travailler avec des scalaires

On prend l'exemple de l'oscillateur harmonique. On utilise une approche énergétique :

$$
\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m &= 0 \\
&\iff (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0
\end{aligned}
$$

On obtient l'équation du mouvement, qui est scalaire.

Travailler avec des systèmes contraints

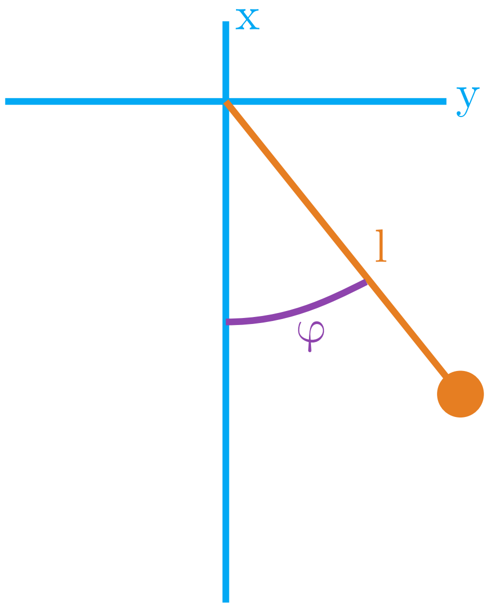
On prend l'exemple du pendule de masse m accrochée à un fil de longueur l.

Il faudrait 2 coordonnées indépendant mais une seule car le système est contraint par x^+yl^2. On prend alors l'angle φ comme unique coordonnée.

Cela s'applique aussi en dimension supérieure, comme dans le cas d'une particule dans une sphère. On peut alors écrire la contrainte :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

On n'utilise que 2 variables, avec le système de coordonnées sphériques



1.1.2 Contraintes

Définitions

On se place dans un système dans un espace en D dimensions de coordonéees $x_1, \ldots, x_n$ ×

× **Difficulté**
Cela ne correspond pas nécéssairement aux coordonnées de l'espace. Si on étudie 2 particules, cela correspond à la somme des degrés de libertés des 2 particules.

Définition 1.1 : Contrainte holonome

On étudie une contrainte qui s'écrit de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n, t) = 0$$

- Si f ne dépend pas du temps, c'est une contrainte holonôme scléronôme
- Si il y a une dépendance selon t, elle est dite rhéonôme

Proposition 1.1 : Degrés de libertés

Un système déterminé par D coordonnées indépendantes mais soumis à k contraintes holonômes indépendantes a $N = D - k$ degrés de liberté.

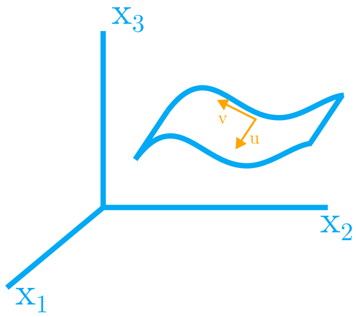
Il faut donc N coordonnées généralisées indépendante pour décrire entièrement le système.

Contraintes indépendantes

On construit la matrice des dérivées partielles

$$(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_D} // \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_D})$$

Exemple



Si on prend un exemple 3D avec une contrainte, je peux imaginer un sous-espace dans lequel le système peut évoluer. On pourra alors prendre des coordonnées adpatées à ce sous-espace, u et v.

On peut écrire $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ sont tangents à la surface.

On peut aussi trouver un vecteur orthogonal [i] à la surface en sachant que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\overrightarrow{X}(t)) = 0 \Rightarrow \dot{\overrightarrow{X}} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = 0$$

Info
On peut aussi faire avec le produit vectoriel de u et v

1.2 Lois de Newton et d'Euler-Lagrange

Soit un système de D dimensions et soumis à k contraintes indépendantes. Le système est soumis aux forces conservatrices $\overrightarrow{F_1}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$, dont la somme vaut $\overrightarrow{F_{ext}}$. On suppose que le mouvement se fait sans frottements

On peut écrire $\overrightarrow{F_{ext}} = -\overrightarrow{\nabla} V$ avec V l'énergie potentielle associée.

De plus, les forces $\overrightarrow{F_{x_k}}$ sont les forces qui maintiennent les contraintes .

Astuce
Par exemple, la force de tension du fil qui maintient la masse à une distance l de l'origine, ou encore la réaction du support.

Théorème 2.1 : Principe d'Almebert

Il y a k forces $\overrightarrow{F_{C_i}}$ pour satisfaire les contraintes $f_i(\overrightarrow{x}) = 0$ pour un mouvement sans frottement. Alors

$$\overrightarrow{F_{C_i}} \propto \overrightarrow{\nabla} f_i$$

On peut donc écrire

$$\sum_i^k \overrightarrow{F_{x_i}} = \sum_i^k \lambda_i \vec{\nabla} f_i$$

1.2.1 Conséquences

f schléronôme

Si f_i est schléronôme ; $\vec{\nabla} f_i$ est un vecteur orthogonal au sous espace donnée par $f_i = 0$.

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(\vec{x}, t) = 0 \iff \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{x}} = 0$$

On en déduit que la forces de contraintes ne travaille pas .

> **Astuce**
>
> En effet, $\vec{F_c}$ est orthogonal au sous-espace, et par définition, le travail est nul $(\vec{F_C} \cdot \vec{v} = 0)$

f rhéonôme

On étudie la trajectoire d'une fourmi sur un ballon. On gonfle le balon pendant que la fourmi en fait le tour.

$\mathrm{d}\vec{x}$ est le déplacement réel du ballon et $\delta\vec{x}$ le déplacement virtuel de la particule. La particule a donc un déplacement $\Delta\vec{x} = \mathrm{d}\vec{x} + \delta\vec{x}$.

> **Proposition 2.1 :** Condition de non frottement
>
> $$\vec{F_c} \perp \delta\vec{x}$$
>
> $\vec{F_c}$ est orthogonal à la surface, donc $\vec{F_C} \propto \vec{\nabla} f$.

> **Forces de contriantes**
>
> Dans les deux cas, elles sont orthognales à la surface de déplacement.

1.2.2 lois fondamentales

On reprend l'exemple avec une particule évoluant dans le sous espace de la nappe. Le SE a N vecteurs tangents $\tau_\alpha = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_\alpha}$

On pose $\vec{F_C}$ la force de contrainte totale, qui est donc orthogonale.

On applique la LFD :

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{F_c} + \overrightarrow{F_{ext}} \\ m\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{\tau_\alpha} &= \vec{\tau_\alpha} \cdot \overrightarrow{F_{ext}} + \sum_{i^k} \lambda_i \vec{\nabla} f_i \cdot \vec{\tau_\alpha} \\ &= \vec{\tau_\alpha} \cdot \overrightarrow{F_{ext}} \end{aligned}$$

En se rapellant que $\tau^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{q_\alpha}$, on écrit

$$m \sum_i^D \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{_partial q_\alpha} - \sum_i^D F_{ext} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}$$

Cependant, on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{ext}} &= -\vec{\nabla} V \\ \Rightarrow F^i_{ext} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} \\ \Rightarrow \sum_i^D F^i_{ext} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} &= -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

On réécrit l'autre terme :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial qu_\alpha}) - \dot{x}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q_\alpha}} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

On écrit maintenant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \sum m\dot{x}_i (\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q_\alpha}}) - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

Définition 2.1 : Lagrangien

$$L(q_\alpha, \dot{q_\alpha}, t) = U - V = \frac{1}{2} m\ddot{x}^2 - V$$

Théorème 2.2 : Équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

1.3 Exemples

1.3.1 Pendule

On reprend l'exemple de pendule. On a $f\overrightarrow{x} = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

On peut écrire $x(\varphi) = l\cos(\varphi), y(\varphi) = l\sin(\varphi)$ En dérivant, on obtient $x(\varphi) = -l\sin(\varphi), y(\varphi) = l\cos(\varphi)$

Comme $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y}$, on en déduit que $\overrightarrow{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2$

De plus, dans la direction $\overrightarrow{P}$, on a $V_P = -mgl\cos(\varphi)$ en appliquant le PFD.

On peut maintenant écrire le Lagrangien :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)$$

Résumé

On a un système de coordonnées χ_i et k contraintes indépendantes. On a fonc $N = D - k$ coordonnées généralisées q_alpha.

On a

$$U = E_c = \frac{1}{2}m\sum_i(\dot{x_i}^2) = U(q_\alpha; \dot{q_\beta}^2, t)$$

et

$$V = E_p = V(q_\alpha, t)$$

puis

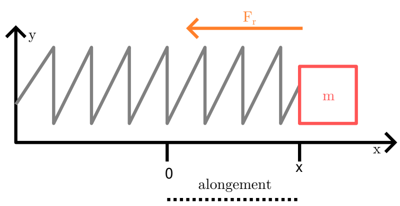
$$L = E_c - E_p = U - V$$

On obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

On a pour chaque α l'EQD ci-dessus.

1.3.2 oscillateur harmonique



Dans cette situation, on obtient

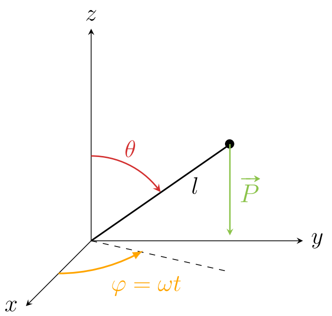
$$L(x\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

En appliquant Euler-lagrange, on a

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

qui est un oscillateur harmonique

1.3.3 Pendule 3-D



On a la contrainte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - R^2 = 0$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 &= R\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 &= R\cos\theta \end{aligned}$$

On dérive :

$$\dot{x_1} = R\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - R\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \; \dot{x_2} \quad = R\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + R\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \; \dot{x_3} = -R\dot{\theta}\sin\theta$$

On en déduit :

$$\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 = R\dot{\theta}^2 + R\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)$$

On peut maintenant calculer le lagrangien :

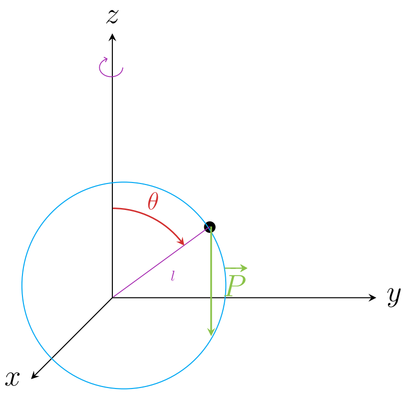
$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 - mgR\cos(\theta)$$

En appliquant Euler-lagranges, on obtient 2 équations :

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta} - mgR\sin\theta - mR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 &= 0 \\ 2mR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + mR^2\sin^2\theta\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = Cst = L_z$.

1.3.4 Bille



On a ici 2 contraintes scléronomes :

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - R^2 = 0$
- $x_2 - x_1 tg(\omega t) = 0$

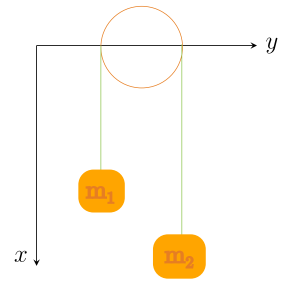
On a $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z} \Rightarrow V = mgR\cos(\theta)$

De plus, $U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2\sin^2\theta)$

On peut écrire le lagrangien puis avec Euler-Lagrange :

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - mgR\sin(\theta) = 0$$

1.3.5 Machine d'Atwood



On a une corde statique de longueur $l + \pi D$

On a $x_1 + x_2 - l = 0$, $z_1 = z_2 = 0$ et $y_1, y_2 = Cst$.

On écrit

$$V = E_p = -mgx_1 - m_2gx_2 = -(m_1 - m_2)g_x1 - m_2gl$$

et

$$U = E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$$

Euler-Lagrange donne

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

Observations importantes

Soit L un lagrangien

$$L_1(q_\alpha, \dot{q_{beta}}, t)$$

et

$$L_2(q_\alpha, \dot{q_{beta}}, t) = L_1(q_\alpha, \dot{q_{beta}}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(_\alpha, t)$$

Avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}F = \frac{\partial F}{\partial t}F\sum_\alpha \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha}$$

Alors L_1 et L_2 donnent les mêmes équations du mouvement.

Preuve 3.1

Il suffit de montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \quad \forall\beta$.

Calculons séparément chaque terme en utilisant l'expression de la dérivée totale de F :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

1) Pour le premier terme, on dérive par rapport à $\dot{q}_\beta$. Comme F ne dépend que de q_α et t, les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$ sont indépendantes des vitesses. Seul le terme de la somme où $\alpha = \beta$ subsiste :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_\beta}$$

En prenant la dérivée temporelle totale de ce résultat, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\beta}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_\beta} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\alpha$$

2) Pour le second terme, on dérive directement $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ par rapport à q_β :

$$\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_\beta \partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

D'après le théorème de Schwarz, les dérivées croisées sont égales ($\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_\beta \partial t}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}$). Les deux termes sont donc identiques, ce qui implique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

La contribution de $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ aux équations d'Euler-Lagrange est nulle.

De plus, Euler-Lagrange est équivalent pour n'importe quel système de coordonnée.

1.3.6 Particule chargée en présence d'un champ EM

On construit $\vec{E} = -\nabla(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Comment on a une invariance de Jauge, différentes combinaisons de potentiels donnent les même champs.

L'équation du mouvement vaut alors $m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$

Le lagrangien donne $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\varphi(\vec{r},t) + q\dot{\vec{e}} \cdot \vec{A}$

De cette façon, si $\varphi\varphi - \frac{\partial\Omega}{\partial t}$, $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Omega$, on a $L \to L + q\frac{\partial\Omega}{\partial t} + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\Omega = L + q\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$

Exercice Tenseur totalement antisymétrique de Levi Civita

Exercice 1 : Montrer que $(\vec{V} \wedge \vec{B})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} V_j B_k$.

Exercice 2 : Montrer que $\sum_p \epsilon_{ijp}\epsilon_{klp} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ (Identité fondamentale).

Preuve 3.2 : Démonstration Exercice 1

Par définition du produit vectoriel $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{B}$ en coordonnées cartésiennes :

- $W_1 = V_2B_3 - V_3B_2$
- $W_2 = V_3B_1 - V_1B_3$
- $W_3 = V_1B_2 - V_2B_1$

En utilisant le symbole de Levi-Civita où $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$ et $\epsilon_{ijk} = 0$ si deux indices sont égaux, on peut condenser ces expressions :

$$(\vec{V} \wedge \vec{B})_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} V_j B_k$$

Pour coller à la notation $\epsilon_{spi}V_sB_p$, on vérifie par permutation circulaire que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$. Ainsi, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$, ce qui correspond bien à ϵ_{spi} avec $s = j$ et $p = k$.

Preuve 3.3 : Démonstration Exercice 2

L'identité $\sum_p \epsilon_{ijp}\epsilon_{klp} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ se démontre par l'analyse des cas :

1. Si $i = j$ ou $k = l$, le membre de gauche est nul (propriété d'antisymétrie de ϵ). Le membre de droite l'est aussi (ex : si $i = j$, $\delta_{ik}\delta_{il} - \delta_{il}\delta_{ik} = 0$).

2. Si $\{i,j\} \neq \{k,l\}$, alors pour tout p, soit $\epsilon_{ijp} = 0$ soit $\epsilon_{klp} = 0$. Le produit est nul, et les deltas de Kronecker s'annulent également.

3. Si $\{i,j\} = \{k,l\}$ avec $i \neq j$:

   - Cas $i = k$ et $j = l$: Le membre de gauche devient $\sum_p (\epsilon_{ijp})^2$. Le seul terme non nul est celui où $p \neq i$ et $p \neq j$, donc $(\pm 1)^2 = 1$. Le membre de droite donne $\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1 \cdot 1 - 0 = 1$.
   - Cas $i = l$ et $j = k$: Le membre de gauche devient $\sum_p \epsilon_{ijp}\epsilon_{jip} = \sum_p \epsilon_{ijp}(-\epsilon_{ijp}) = -1$. Le membre de droite donne $\delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = 0 - 1 = -1$.

L'identité est donc vérifiée dans tous les cas.

On peut désormais écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r_i}} = m\overrightarrow{\dot{r_i}} + qA_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = q\sum_j \dot{r_j}\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - q\frac{\partial \varphi}{\partial r_i}$$

On en déduit que

$$m\ddot{r_i} = -q(\frac{\partial A_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r_i}) + q(\sum_j \dot{r_j}\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\dot{r_j})$$

et

$$B_K = \sum_{l,m} \epsilon_{lm}\frac{\partial A_m}{\partial r_l}$$