Rédigé par PAULHENRY SAUX
Université Paul Sabatier · L2 PS

Chapitre 1

Mécanique Lagrangienne - Méthode

1.1 Méthode générale

1.1.1 Coordonnées généralisées

Définition 1.1 : Coordonnées généralisées

Pour un système à N corps possédant k liaisons indépendantes, le nombre de degrés de liberté (ddl) est $n = 3N - k$. On choisit alors un ensemble de n variables indépendantes $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ appelées **coordonnées généralisées** permettant de décrire de manière unique la position de tout point du système.

Méthode de paramétrage

Une fois les q_i choisis, exprimer systématiquement les coordonnées cartésiennes (x_j, y_j, z_j) de chaque masse m_j en fonction des q_i. Puis, dériver-les par rapport au temps pour obtenir les vitesses $(\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j)$.

1.1.2 Construction du Lagrangien

Proposition 1.1 : Énergie cinétique T

L'énergie cinétique globale est la somme des énergies cinétiques de chaque masse.

- En cartésiennes : $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
- En polaires : $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$
- En sphériques : $T = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\big)$

Proposition 1.2 : Énergie potentielle V

Exprimer les forces conservatives qui s'appliquent. Les deux plus fréquentes sont :

- La pesanteur : $V_{pes} = \pm mgz$ (le signe dépend de l'orientation de l'axe vertical).
- Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 : $V_{el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$.

Définition 1.2 : Lagrangien

Le Lagrangien du système est défini par :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$$

1.1.3 Équations du mouvement

Théorème 1.1 : Équations d'Euler-Lagrange

Pour chaque coordonnée généralisée q_i (avec $i = 1, \ldots, n$), l'équation du mouvement s'obtient par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Déroulé du calcul

Pour chaque variable q_i :

1. Calculer la quantité conjuguée (moment généralisé) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

2. Dériver cette quantité par rapport au temps $\frac{d}{dt}(p_i)$ (attention aux dérivées composées !).
3. Calculer la force généralisée $\frac{\partial L}{\partial q_i}$.
4. Assembler le tout pour obtenir une équation différentielle du second degré.

1.1.4 Constantes du mouvement

Variables cycliques (Théorème de Noether)

Définition 1.3 : Variable cyclique

Une coordonnée généralisée q_i est dite **cyclique** si elle n'apparaît pas explicitement dans le Lagrangien, c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Proposition 1.3 : Conservation de l'impulsion

Si q_i est une variable cyclique, alors le moment généralisé conjugué p_i est une **constante du mouvement** :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{Constante}$$

Conservation de l'énergie et Formule de Beltrami

Définition 1.4 : Intégrale de Jacobi / Énergie constante

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), alors la fonction énergie h (ou intégrale de Jacobi) est conservée. Elle se calcule par :

$$h = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{Constante}$$

Si les liaisons sont indépendantes du temps et que V ne dépend pas des vitesses, alors $h = T + V = E_m$ (Énergie mécanique).

Théorème 1.2 : Formule de Beltrami

Pour un système à **un seul degré de liberté** q où $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, l'équation d'Euler-Lagrange s'intègre directement sous la forme :

$$L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{Constante}$$

Cette formule est un cas particulier de la conservation de l'intégrale de Jacobi.

1.2 Exemple - Machine d'Artwood

La corde est inextensible et de longueur totale $L + \pi R$. La portion de corde enroulée sur la poulie est une demi-circonférence, soit πR. Les portions verticales mesurent z_1 et z_2. On en déduit la relation de contrainte holonome :

$$z_1 + z_2 + \pi R = L + \pi R \implies z_1 + z_2 = L$$

Il y a 2 coordonnées et 1 équation de contrainte, le système possède donc :

$$n = 2 - 1 = 1 \text{ degré de liberté}$$

On choisit z_1 comme coordonnée généralisée unique. On a alors $z_2 = L - z_1$, ce qui implique par dérivation temporelle : $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$.

1.2.1 Construction du Lagrangien

Énergie cinétique (T) : Les masses ont des mouvements purement verticaux :

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2$$

Énergie potentielle (V) : L'axe (Oz) est vertical descendant, dans le sens de la gravité $\vec{g}$. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit donc avec un signe moins :

$$V = -m_1gz_1 - m_2gz_2 = -m_1gz_1 - m_2g(L - z_1) = -(m_1 - m_2)gz_1 - m_2gL$$

Lagrangien (L) :

$$L(z_1, \dot{z}_1) = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2)gz_1 + m_2gL$$

1.2.2 Équation du mouvement

On applique l'équation pour la variable z_1 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = (m_1 + m_2)\dot{z}_1 \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{z}_1$
- $\frac{\partial L}{\partial z_1} = (m_1 - m_2)g$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 - (m_1 - m_2)g = 0 \implies \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

1.3 Double tige

Deux masselottes considérées comme ponctuelles se déplacent sans frottements sur une table que l'on identifie au plan (O, x, y). La première masselotte, de masse m_1, est reliée à l'origine par un première tige rigide de masse négligeable et de longueur l_1. La deuxième masselotte, de masse m_2, est attachée à la première par une deuxième tige rigide elle aussi de masse négligeable et de longueur l_2.

On appelle θ l'angle que fait la première tige fait avec l'axe O_x et α l'angle que fait la deuxième tige avec la première.

Les longueurs des tiges l_1 et l_2 sont rigides et constantes. Les seules variables indépendantes sont les angles θ et α. Le système possède donc :

$$n = 2 \text{ degrés de liberté}$$

Les coordonnées généralisées choisies sont $q = (\theta, \alpha)$.

L'angle absolu de la deuxième tige par rapport à l'axe (Ox) est $(\theta + \alpha)$. Par projection trigonométrique :

- Pour m_1 :
$$x_1 = l_1 \cos\theta, \quad y_1 = l_1 \sin\theta$$
- Pour m_2 :
$$x_2 = l_1 \cos\theta + l_2 \cos(\theta + \alpha), \quad y_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin(\theta + \alpha)$$

1.3.1 Construction du Lagrangien

Calcul de T

Pour calculer T, on dérive d'abord les positions par rapport au temps :

- $\dot{x}_1 = -l_1\dot{\theta}\sin\theta$ et $\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}\cos\theta \implies \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}^2$
- $\dot{x}_2 = -l_1\dot{\theta}\sin\theta - l_2(\dot{\theta} + \dot{\alpha})\sin(\theta + \alpha)$
- $\dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}\cos\theta + l_2(\dot{\theta} + \dot{\alpha})\cos(\theta + \alpha)$

En développant $\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$ et en utilisant l'identité $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$, on obtient :

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\theta}^2 + l_2^2(\dot{\theta}+\dot{\alpha})^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\alpha})\cos\alpha$$

L'énergie cinétique totale $T = T_1 + T_2$ s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2(\dot{\theta}+\dot{\alpha})^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\alpha})\cos\alpha$$

Lagrangien

Le mouvement a lieu sur une table horizontale plane (O, x, y). En l'absence de forces verticales ou de gravité mentionnée dans ce plan, l'énergie potentielle est constante : $V = 0$. On a donc :

$$L(\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) = T$$

1.3.2 Variable cyclique et quantités conservées

En observant l'expression de L, on constate que l'angle θ n'apparaît nulle part explicitement (seule sa dérivée $\dot{\theta}$ est présente).

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies \theta \text{ est une variable cyclique.}$$

Puisque θ est cyclique, le moment généralisé conjugué p_θ associé à cette coordonnée est une constante du mouvement :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{Constante}$$

Calculons explicitement cette quantité :

$$p_\theta = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta} + m_2l_2^2(\dot{\theta}+\dot{\alpha}) + m_2l_1l_2(2\dot{\theta}+\dot{\alpha})\cos\alpha = \text{Constante}$$

Cette constante représente le moment cinétique total du système par rapport à l'axe vertical passant par l'origine O. [i]

i Info
On pouvait s'en douter car le système est invariant par rotation globale d'un angle θ.