Chapitre 2

Calcul variationnel

2.1 Variations et Actions

Parfois on veut minimiser non pas une fonction mais une fonctionnelle :

$$\int L(f'(x), f(x))\mathrm{d}x$$

Problème

Avec une fonction à une variable, pour trouver un maxima, on calcule simplement la dérivée.

Pour une fonction à plusieurs variables, on calcule le gradient.

On s'intersse maintenant aux fonctionelles.

Définition 1.1 : Fonctionelle

Une fonctionelle prend une fonction entrée et donne un nombre réel en sortie

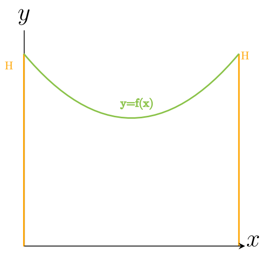
Par exemple

$$\int_x x_i^{x_f} L(x, f(x), f'(x))\mathrm{d}x$$

est une fonctionnelle.

Par exemple, l'énergie potentielle d'un cable entre 2 poteau dont on modélise la corde par $y = f(x)$.

Rédigé par **PAULHENRY SAUX**
Université Paul Sabatier · L2 PS



Pour minimiser ou maximiser une fonctionnelle $\tilde{f}[y]$, on cherche une fonction optimale $f_0(x)$ telle que toute petite variation infinitésimale $\delta f(x)$ autour de $f_0(x)$ (avec $\delta f(x_i) = \delta f(x_f) = 0$ aux bornes) rende la variation de la fonctionnelle nulle au premier ordre : $\delta \tilde{f} = 0$.

On calcule la variation de la fonctionnelle $\tilde{f}$ induite par δf :

$$\begin{aligned}\delta \tilde{f} &= \tilde{f}[f_0 + \delta f] - \tilde{f}[f_0] \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \left[L(x, f_0 + \delta f, f_0' + \delta f') - L(x, f_0, f_0')\right] \mathrm{d}x\end{aligned}$$

En effectuant un développement limité au premier ordre (Taylor) de la fonction L au voisinage de (f_0, f_0'), on obtient :

$$\delta \tilde{f} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \delta f + \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' \right) \mathrm{d}x$$

Pour factoriser par δf, on utilise la règle de dérivation d'un produit sur le second terme :

$$\frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' = \frac{\partial L}{\partial f'} \frac{\mathrm{d}(\delta f)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \delta f \right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \delta f$$

En réinjectant cette identité (ce qui revient à faire une intégration par parties), la variation s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta \tilde{f} &= \int_{x_i}^{x_f} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \delta f \right) \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right) \delta f \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \delta f \right]_{x_i}^{x_f} + \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right) \delta f \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Comme la variation de la trajectoire est fixée et nulle aux extrémités ($\delta f(x_i) = \delta f(x_f) = 0$), le premier terme s'annule. Pour que $\delta \tilde{f} = 0$ quelle que soit la variation $\delta f(x)$, le théorème fondamental du calcul des variations impose que le terme sous l'intégrale soit nul.

On retrouve alors l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) = 0$$

Définition 1.2 : Action

Pour une trajectoire réelle $q(t)$ reliant un point A à un point B entre les instants t_i et t_f, on définit l'Action S par la fonctionnelle :

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), t)\,\mathrm{d}t$$

Le principe de moindre action (ou de stationnarité) stipule que la trajectoire physique suivie par le système est celle qui rend S stationnaire ($\delta S = 0$).

2.2 Multiplicateurs de Lagrange et Contraintes

2.2.1 Multiplicateur de Lagrange

Rappel : Multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver les extrema d'une fonction $f(x, y)$ sous une contrainte $g(x, y) = 0$, on utilise la méthode du multiplicateur de Lagrange.

1. On introduit une fonction auxiliaire $f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, où λ est le multiplicateur de Lagrange.
2. On cherche les points critiques de f_λ en résolvant le système :

   $$\begin{cases} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

   Cela donne les points critiques $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$ qui dépendent de λ.
3. On injecte ces points dans l'équation de contrainte $g(x^*(\lambda), y^*(\lambda)) = 0$ pour trouver la ou les valeurs de $\lambda = \lambda^*$.
4. Les points $(x^*(\lambda^*), y^*(\lambda^*))$ sont les extrema de f sous la contrainte $g = 0$.

Cette méthode se généralise à plus de variables et plus de contraintes.

On a une fonction de plusieurs variable F On veut déterminer ses extremas sous la contrainte $f(\vec{x})$. Cela se produit en $\vec{x_0}$, alors $\vec{\nabla} F // \vec{\nabla} f \Rightarrow \vec{\nabla} = \lambda \vec{\nabla} f$

Si on a 2 contraintes, le sous espace est de dimension $n-2$. Ainsi, $\vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_2$ sont $\perp$ à l'espace tangentiel et $\vec{\nabla} F$ $\perp$ à l'espace tengent, donc va être une combinaison linéaire des 2.

> **Théorème 2.1 :** Gradient et contrainte dans le cas général
>
> $\overrightarrow{\nabla} F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{\nabla} f_i(\overrightarrow{x_0})$

2.2.2 Application au calcul variationnel

On veut mnimiser

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)$$

mais avec la contrainte intégrale

$$\int_{t_i}^{t_f} f(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = 0$$

On peut écrire

$$\tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} (L - \sum \lambda f)\mathrm{d}t$$

2.2.3 Contrainte locale

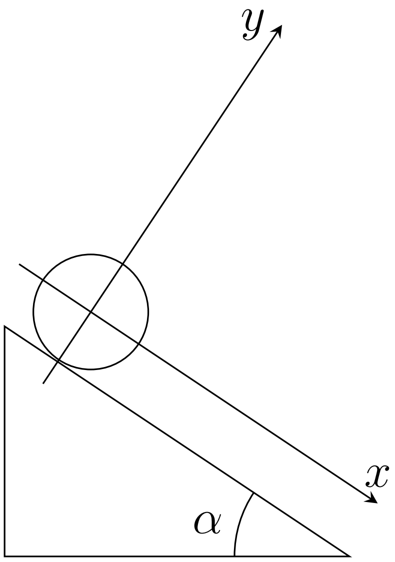
C'est une contrainte que doit satisfaire S à chaque instant. Les multiplicateurs de Lagrange dépendent du temps :

$$\tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} (L - \sum_{i=1}^{k} \lambda(t) f)\mathrm{d}t$$

Mais il vaut mieux utiliser les contraintes locales dès le début avec des contraintes scléronomes/hétéronomes.

2.2.4 Exemple : Roulement sans glissement

On étudie un disque homogène de masse m et de rayon R dévalant un plan incliné d'un angle α. Les coordonnées généralisées sont la position du centre de masse X et l'angle de rotation θ.



La contrainte de non-glissement associe cinématique et rotation. On l'intègre au Lagrangien via le multiplicateur λ pour trouver la force de réaction.

Méthode : Équations d'Euler-Lagrange avec contrainte

Quand un système est soumis à une contrainte holonome de la forme $C(q_i) = 0$, on définit le Lagrangien augmenté : $L^* = L - \lambda C(q_i)$. Les équations du mouvement pour chaque coordonnée q_i deviennent :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial C}{\partial q_i} = 0$$

Énergies et Lagrangien augmenté

- **Énergie cinétique :** $T = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ (avec $I = \frac{1}{2}mR^2$ pour un disque homogène).
- **Énergie potentielle :** $V = -mgX\sin(\alpha)$.
- **Contrainte de roulement :** $C(X,\theta) = X - R\theta = 0$.

Le Lagrangien augmenté $L^* = T - V - \lambda C$ s'écrit :

$$L^*(X,\theta,\dot{X},\dot{\theta},\lambda) = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgX\sin(\alpha) - \lambda(X - R\theta)$$

Système d'équations du mouvement

En appliquant les équations d'Euler-Lagrange par rapport à X, θ et λ, on obtient le système :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^*}{\partial X} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{X}}\right) = 0 \implies & \quad mg\sin(\alpha) - \lambda - m\ddot{X} = 0 \\
\frac{\partial L^*}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \implies & \quad \lambda R - I\ddot{\theta} = 0 \\
\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = 0 \implies & \quad X - R\theta = 0
\end{aligned}$$

Résolution et accélération

En dérivant deux fois la contrainte, on lie les accélérations : $\ddot{X} = R\ddot{\theta}$. L'équation permet d'isoler le multiplicateur de Lagrange λ (qui représente ici la force de frottement tangentielle) :

$$\lambda = \frac{I}{R}\ddot{\theta} = \frac{I}{R^2}\ddot{X}$$

En substituant λ dans l'équation dynamique :

$$m\ddot{X} + \frac{I}{R^2}\ddot{X} = mg\sin(\alpha) \implies \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{X} = mg\sin(\alpha)$$

L'accélération générale du centre de masse vaut donc :

$$\ddot{X} = \frac{g\sin(\alpha)}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Application numérique selon la géométrie

- Pour un **disque homogène** ($I = \frac{1}{2}mR^2$) : $\ddot{X} = \dfrac{g\sin(\alpha)}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}g\sin(\alpha)$
- Pour un **cerceau ou cylindre creux** ($I = mR^2$) : $\ddot{X} = \dfrac{g\sin(\alpha)}{1+1} = \dfrac{1}{2}g\sin(\alpha)$